



Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Mitja Luštrek

Patologija v hevrističnih preiskovalnih algoritmih

Doktorska disertacija

Mentor: akad. prof. dr. Ivan Bratko

Somentor: prof. dr. Matjaž Gams

Ljubljana, 2007

Povzetek

Hevristično preiskovanje je pogost način reševanja problemov. V disertaciji se ukvarjamo z dvema njegovima oblikama: preiskovanjem z minimaksom in enoagentnim preiskovanjem. Pri preiskovanju z minimaksom pregledamo drevo igre od trenutnega položaja do izbrane globine, položaje tam hevristično ocenimo in ocene prenesemo po drevesu navzgor do trenutnega položaja, kjer na njihovi podlagi naredimo potezo. Pri enoagentnem preiskovanju ravnamo podobno: pregledamo del prostora stanj okrog trenutnega stanja, stanja na robu pregledanega območja hevristično ocenimo in ocene prenesemo do trenutnega stanja, kjer na njihovi podlagi izberemo naslednje stanje. Glavna razlika je v načinu prenosa ocen: enkrat uporabljamo minimaks, drugič pa minimin (kar ni nič drugega kot minimum). Za obe obliki preiskovanja je iz prakse znano, da so njune odločitve boljše, če prostor preiščeta globlje. Analize matematičnih modelov pa so pokazale, da se pod navidez povsem smiselnimi pogoji zgodi ravno nasprotno: da preiskovanje ojača napake hevrističnih ocen in da zato globlje preiskovanje da slabše odločitve. Ta pojav se imenuje *preiskovalna patologija*.

V preteklosti sta se v modelih preiskovanja z minimaksom za prave vrednosti položajev pogosto uporabljala zgolj poraz in zmaga. V disertaciji utemeljimo, da je bolj realistično uporabiti več pravih vrednosti, in opišemo preprost realnovrednosten model minimaksa, v katerem so vrednosti bližnjih položajev med seboj neodvisne. V tem modelu patologije ni, s pretvorbo v dvovrednosten model pa pokažemo, da v dvovrednostnih modelih do patologije pride zaradi nerealističnega modeliranja hevristične napake. Ta razlaga, zakaj se patologija v modelih pojavlja, čeprav je v praksi ni, zahteva manj predpostavk o lastnostih modela od preteklih.

Znanih je več dejavnikov, ki vplivajo na patologijo, od katerih so najpomembnejši število različnih možnih vrednosti položaja, vejitev drevesa igre in stopnja odvisnosti med vrednostmi bližnjih položajev. Niso pa bili ti dejavniki do zdaj dovolj sistematično analizirani in tudi mehanizmi, s katerimi vplivajo na patologijo, niso bili celovito pojasnjeni. V disertaciji ugotovimo, da preiskovanje z minimaksom krči razpon vrednosti, ki se pojavljajo v drevesu, kar povzroči, da se pri dovolj majhnem začetnem številu vrednosti tudi večvrednosten model vede kot patološki dvovrednostni. Večja vejitev drevesa to krčenje pospešuje, odvisnost med vrednostmi bližnjih položajev pa zavira.

Povod za odkritje patologije je bil poizkus formalne razlage, zakaj globlje preiskovanje z minimaksom daje boljše odločitve. A od takrat so se raziskovalci usmerili k patologiji in so razlago delovanja minimaksa zanemarili. V disertaciji pojasnimo, da je preiskovanje z minimaksom koristno, ker medsebojni vpliv hevrističnih vrednosti bratskih vozlišč povzroči, da je napaka njihovega minimuma ali maksimuma manjša od napake samih vozlišč. Ker pri globljem preiskovanju minimum in maksimum uporabimo večkrat, je tudi napaka v korenu takrat manjša.

Patologija enoagentnega preiskovanja je raziskana precej slabše od patologije minimaksa, kljub temu, da je slednja predvsem teoretičen pojav, patologija enoagentnega preiskovanja pa je bila opažena tudi v praksi. V disertaciji si jo najprej ogledamo na umetnih preiskovalnih drevesih. Najdemo dve lastnosti dreves, ki patologijo povzročata, od katerih ena pojasni tudi patološkost drevesa, na katerem je bila odkrita. Za hevristične ocenjevalne funkcije ugotovimo, da njihova popolnost in monotona nepadajočnost patologijo preprečujeta. Nato si patologijo ogledamo na

praktičnem problemu iskanja poti po zemljevidih iz računalniških iger, kjer najdemo tri lastnosti uporabljenega preiskovalnega algoritma LRTS, ki patologijo povzročajo. Na koncu po zgledu minimaksa še pojasnimo, zakaj je enoagentno preiskovanje koristno.

Abstract

Heuristic search is a widely used problem-solving technique. The thesis deals with two forms of heuristic search: minimax search and single-agent search. In minimax search, the game tree is expanded starting from the current position down to a given depth, the positions there are heuristically evaluated and the estimates backed-up to the current position, where they are used to make a move. In single-agent search, the procedure is similar: a part of the search space around the current state is examined, the states at the frontier of the examined area are heuristically evaluated and backed-up to the current state, where they are used to select the next state. The main difference is in the back-up procedure: in the first case minimax is used and in the second case minimin (which simply means minimum). Practice shows that both forms of search give better decisions when they search deeper. However, analyses of mathematical models have shown that under apparently sensible conditions the opposite happens: backing-up amplifies the error of the heuristic estimates and consequently deeper search gives worse decisions. This phenomenon was termed *search pathology*.

In most models of minimax search used in previous research, true position values could only be losses and wins. We establish that multiple true values are more realistic and describe a simple real-valued minimax model in which the values of nearby positions are independent. This model is not pathological. Through conversion to a two-valued model, we show that two-valued models tend to be pathological due to unrealistic modeling of the heuristic error. This explanation for the presence of the pathology in mathematical models despite its absence in practice requires fewer assumptions about the properties of the model than previous explanations.

Several factors that affect the pathology are known from the literature, the most important being the number of possible position values, the branching factor of the game tree and the degree of dependence between the values of nearby positions. However, these factors have never been systematically analyzed and the mechanisms through which they affect the pathology have not been adequately explained. We show that minimaxing reduces the range of values appearing in the game tree, so given a small enough starting number of values, a multivalued model is reduced to the pathological two-valued one. The reduction is sped up by a large branching factor and slowed down by a strong dependence between the values of nearby positions.

The pathology was discovered in an attempt to formally explain why deeper minimax search gives better decisions. From that point the researchers have focused on the pathology, neglecting the explanation of the benefits of minimax. We explain that minimax search is beneficial because of the interaction of the heuristic values of sibling nodes, which makes the error of their maximum or minimum smaller than the error of the nodes themselves. During deeper search, maximum and minimum are applied more times, making the error at the root smaller.

The pathology in single-agent search has not received as much attention as the minimax pathology, even though the latter is known mostly from theoretical analyses, whereas the former has also been observed in practice. First, we examine the pathology in synthetic search trees. Two properties of the trees that make them pathological are found, one of which also explains the pathology in the tree in which the phenomenon was discovered. We also discover that admissible and monotonically non-decreasing heuristic evaluation functions are less prone to pathology. Next, we explore the

pathology in path-finding on maps from computer games. Three pathology-causing properties of LRTS, the search algorithm of our choice, are found. Finally, following the explanation of the benefits of minimax search, we explain why single-agent search is beneficial.

Zahvale

Zahvala gre najprej mojemu raziskovalnemu mentorju Matjažu Gamsu. On je tisti, ki me je sploh seznanil z malo poznanim, a zanimivim problemom patologije minimaksa, med delom pa mi je bil vedno na voljo za pogovor. Čeprav se v teh pogovorih pogosto nisva strinjala in so bili včasih kar burni, so vendarle bistveno pripomogli k odkritjem, opisanim v disertaciji. Hvaležen sem mu tudi za njegova prizadevanja, da bi iz mene vzgojil raziskovalca.

Disertacije ne bi bilo brez mojega fakultetnega mentorja Ivana Bratka. Njegove pripombe, zamisli in nasveti so domala vedno zadeli žebljico na glavico. Čeravno so bili najini pogovori redki, so k mojemu delu pomembno prispevali. Hvala.

Sodelavcem z Odseka za inteligentne sisteme sem hvaležen, ker sem po njihovi zaslugi delal v prijetnem okolju. Žal mi je le, da skoraj ni bilo priložnosti za vsebinsko sodelovanje. Kot izjemi naj omenim Franceta Dacarja in Teo Tušar, ki sta mi na pomoč priskočila s svojim matematičnim znanjem, ter Bogdana Filipiča, ki je kot član komisije za oceno disertacije predlagal kopico umestnih popravkov. Za koristne pogovore o patologiji minimaksa se zahvaljujem Aleksandru Sadikovu in Dani S. Nau, za pomoč pri zopni matematični zagati pa Mihaelu Permanu.

Zahvalil bi se rad tudi Vadimu Bulitku, ki me je za štiri mesece sprejel v svojo raziskovalno skupino na Univerzi v Alberti. Njegovo znanje s področja enoagentnega preiskovanja ter njegova prizadevnost in metodičnost so mi močno pomagali pri raziskavah patologije pri iskanju poti. Spopad s programersko platjo teh raziskav pa mi je olajšala Jieshan Lu.

Za konec naj se zahvalim še svojim staršem, katerih zasluge sicer niso neposredne in jih je težko ubesediti (tu kajpada nimam v mislih eksistencialnih), a brez njih vseeno ne bi postal doktor znanosti. In potem je tu še Jelka, ki sicer za moj doktorat nima posebnih zaslug, je pa čudovita in Tea pravi, da jo moram omeniti.

Kajpada mi je na ta ali oni način gotovo pomagal še kdo, ki sem se mu pozabil zahvaliti. Če bi se ga spomnil, bi mu bil vsekakor hvaležen.

Kazalo

1.	Uvod.....	1
1.1.	Minimaks in njegova patologija	1
1.2.	Enoagentno preiskovanje in njegova patologija	3
1.3.	Prispevki k znanosti	4
1.4.	Organizacija disertacije.....	5
2.	Pregled sorodnega dela	7
2.1.	Odkritje patologije minimaksa.....	7
2.1.1.	Bealov model	7
2.1.2.	Nauov model in razlaga	8
2.2.	Razlogi za odsotnost patologije v igrah.....	10
2.2.1.	Vejitev drevesa igre	10
2.2.2.	Število vrednosti položaja.....	11
2.2.3.	Verjetnost poraza	12
2.2.4.	Odvisnost položajev.....	12
2.2.5.	Obravnava napake.....	15
2.2.6.	Povzetek.....	17
2.3.	Odkritje patologije enoagentnega preiskovanja.....	22
3.	Patologija minimaksa z neodvisnimi položaji	23
3.1.	Neodvisni realnovrednostni model minimaksa.....	23
3.1.1.	Ugotavljanje patološkosti	26
3.2.	Zakaj naš neodvisni model ni patološki.....	28
3.3.	Je nepatološkost pričakovati v splošnem?	31
3.3.1.	Statična dvovrednostna napaka položaja više je večja	32
3.3.2.	Statična dvovrednostna napaka položaja više je dovolj večja	35
3.4.	Med realnimi in dvojiškimi vrednostmi.....	36
3.4.1.	Patološkost in koristnost minimaksa v istem drevesu igre	43
4.	Patologija minimaksa z odvisnimi položaji	46
4.1.	Odvisni realnovrednostni model minimaksa	46
4.1.1.	Ugotavljanje patološkosti	48
4.2.	Primerjava s šahovskim programom.....	51
4.3.	Zrnatost in stopnja odvisnosti modela	53
5.	Zakaj je minimaks koristen.....	58
5.1.	Razlaga na enostavnem modelu.....	58

5.2.	Posplošitev modela.....	62
6.	Patologija enoagentnega preiskovanja	66
6.1.	Patologija v umetnih preiskovalnih drevesih	66
6.1.1.	Ugotavljanje patološkosti pri Bulitkovi ocenjevalni funkciji	67
6.1.2.	Vpliv narave problema na patologijo	69
6.1.3.	Vpliv hevristične ocenjevalne funkcije na patologijo	75
6.2.	Patologija pri iskanju poti	79
6.2.1.	Opis problema	80
6.2.2.	Ugotavljanje patološkosti	80
6.2.3.	Razlogi za patologijo.....	82
6.3.	Zakaj je enoagentno preiskovanje koristno	86
7.	Sklep.....	91
7.1.	Patologija minimaksa	91
7.2.	Patologija enoagentnega preiskovanja	92
7.3.	Nadaljnje delo	93
8.	Dodatki	94
8.1.	Oznake.....	94
8.1.1.	Patologija minimaksa	94
8.1.2.	Patologija enoagentnega preiskovanja	96
8.2.	Slovarček.....	97
	Literatura	99
	Izjava o samostojnosti dela	105

1. Uvod

Mnogi problemi se dajo predstaviti s prostorom stanj, ki ga opišemo z grafom, katerega vozlišča ustrezajo možnim stanjem problema, povezave pa prehodom med stanji [10, 54]. Značilna primera sta igranje igre, kjer so stanja položaji v igri, povezave pa poteze, in iskanje poti po prostoru, kjer so stanja položaji v prostoru, povezave pa premiki med njimi. Stanja so lahko znana vnaprej (podan je zemljevid prostora) ali pa so znana le pravila, po katerih se tvorijo (za igro so v vsakem položaju znane dovoljene poteze, na podlagi katerih se določijo položaji, oddaljeni za eno potezo). K opisu problema sodita tudi množici začetnih in končnih stanj (začetni in končni položaji v igri ter izhodišča in cilji v prostoru; začetno stanje je navadno eno samo, končnih pa pogosto več). Stanjem ali prehodom med njimi se navadno pripišejo vrednosti, na podlagi katerih se odločamo, kateri so v nekem smislu boljši (končnim položajem v igri pripišemo rezultat, prehodom med stanji v prostoru pa razdaljo). Pri reševanju problema si prizadevamo najti najboljše končno stanje ali najboljšo pot do njega (v igri skušamo doseči čim boljši končni rezultat, v prostoru pa najti čim krajšo pot od izhodišča do cilja).

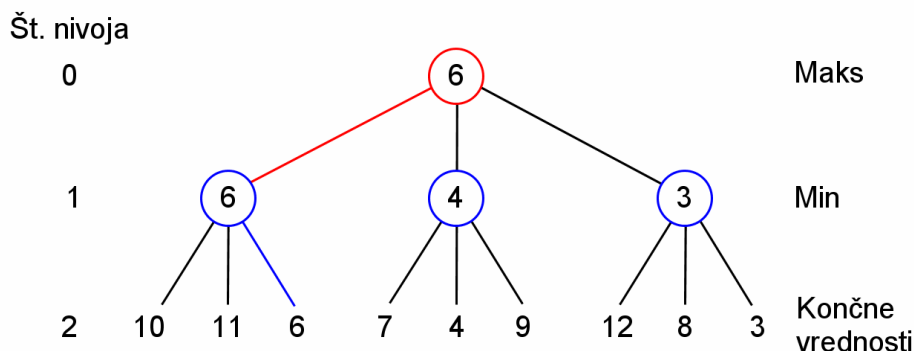
Pri reševanju problemov, kakršne smo opisali, pogosto naletimo na dve težavi. Prva je, da je prostor stanj dostikrat zelo velik (število različnih položajev v šahu je ocenjeno na $\geq 10^{43}$ [63]), kar pomeni, da celega z današnjimi računalniki ne moremo preiskati. Lahko pa preiščemo njegove dele, a pri tem naletimo na drugo težavo: večini stanj je težko pripisati vrednost (le končnim položajem v igri zlahka pripišemo rezultat in le za položaje na že najdeni poti od izhodišča do cilja zlahka določimo, na kako dolgi poti ležijo). Zaradi tega si pomagamo s heuristikami, kar pomeni, da stanja, katerim ne moremo pripisati prave vrednosti, na nek način ocenimo (za položaj v igri ocenimo, do kakšnega rezultata bomo iz njega prišli, in za stanje v prostoru ocenimo, kako dolga bo pot do cilja, ki vodi skozenj). S pomočjo heuristik tako lahko s preiskovanjem delov prostora stanj pridemo do delnih rešitev (izberemo naslednjo potezo v igri in poiščemo pot skozi del prostora blizu trenutnega položaja), ki jih sestavimo v končno.

Probleme, ki so predstavljeni s prostorom stanj in pri katerih si moramo zaradi njihove zahtevnosti pomagati s heuristikami, rešujemo s heurističnimi preiskovalnimi algoritmi. Tovrstni problemi se delijo v tri glavne skupine [28]: igre z dvema igralcema, enoagentno iskanje (angl. single-agent search) in zadoščanje omejitvam (angl. constraint satisfaction). Disertacija se bo ukvarjala z najpomembnejšim algoritmom za igre z dvema igralcema, minimaksom, in z enoagentnim preiskovanjem. Preiskovanje bomo imenovali postopek za reševanje problema iskanja.

1.1. Minimaks in njegova patologija

Minimaks si je kot postopek za izbiro poteze pri šahu izmislil John von Neumann leta 1928 [65] in je uporaben v večini iger za dva igralca. Najlažje ga opišemo s pomočjo drevesa igre. V drevesu vozlišča ponazarjajo položaje v igri, povezave pa poteze. Koren ustreza trenutnemu položaju, povezave, ki vodijo v njegove sinove, pa potezam, med katerimi izbiramo. V listih drevesa so vrednosti, ki ustrezajo rezultatom v končnih položajih. Mnoge igre bi lahko predstavili z nedrevesnim grafom, saj do nekaterih položajev lahko pridemo na različne načine, vendar zaradi enostavnosti tega navadno ne naredimo, tako da ti položaji v drevesu nastopijo večkrat. Nivoji drevesa so oštevilčeni od zgoraj navzdol in se začno z 0. Da lahko v trenutnem položaju izberemo najboljšo potezo, moramo torej ovrednotiti vozlišča na nivoju 1. Vrednosti, ki jim jih pripišemo,

imenujemo povratne (angl. backed-up) in jih iz vrednosti listov dobimo z algoritmom minimaks. To pomeni, da vozliščem na nivojih, kjer smo na potezi mi, priredimo maksimum vrednosti sinov, saj v takih vozliščih vedno lahko naredimo potezo, ki vodi v za nas najugodnejši položaj. Vozliščem na nivojih, kjer je na potezi nasprotnik, pa priredimo minimum vrednosti sinov, saj nasprotnik vleče poteze, ki so za nas slabe. Nivoje imenujemo maks in min; vrsti nivojev se navadno izmenjujeta. Primer drevesa igre in njegovega preiskovanja z minimaksom je na sliki 1; nivoji maks so **rdeči**, nivoji min **modri**, povezave, ki ustrezajo izbranim potezam, pa obarvane.

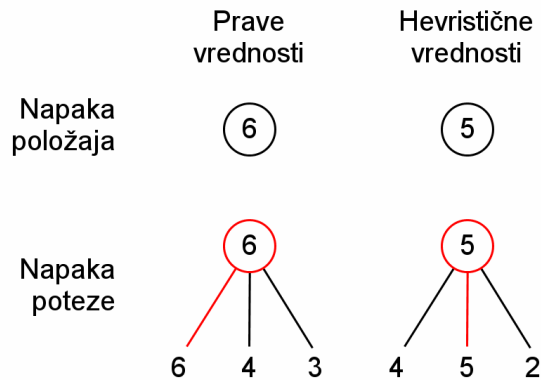


Slika 1. Drevo igre in njegovo preiskovanje z minimaksom

Poleg običajnega algoritma minimaks poznamo tudi različico negamaks. Negamaks na vseh nivojih vozliščem priredi maksimum vrednosti sinov, vendar vrednostim pri vsakem prehodu med nivojema zamenja predznak. Je enakovreden minimaksu, obenem pa nekoliko poenostavi programiranje.

Če bi lahko preiskali celo drevo igre, bi z algoritmom minimaks vedno lahko izbrali potezo, ki bi nas pripeljala do najboljšega možnega rezultata. A ker so drevesa igre za kaj takega navadno prevelika, si moramo pomagati s heuristikami. To pomeni, da drevo razvijemo do izbrane globine in položaje tam ocenimo s heuristično ocenjevalno funkcijo. Heuristične ocene navadno niso povsem pravilne, praksa pa kaže, da programi za igranje iger igrajo bolje, kadar preiščejo večji del drevesa igre, torej kadar položaje heuristično ocenijo globlje. Vrednosti, ki jih vrne ocenjevalna funkcija, imenujemo statične heuristične vrednosti in njihovo napako statična napaka. Iz praktičnih opažanj bi bilo moč sklepati, da minimaks napako heurističnih ocen zmanjša in da so torej povratne heuristične vrednosti bolj zanesljive od statičnih. Zgodnji poizkusi formalne razlage koristnosti preiskovanja z minimaksom [6, 41] pa so pripeljali do presenetljivega odkritja, da se zgodi prav nasprotno: da minimaks napako heurističnih ocen ojača. Ta pojav je bil imenovan patologija minimaksa (angl. minimax pathology).

Ločimo dve vrsti napake, ki ju povzročajo nezanesljive heuristične ocene: *napako položaja* (angl. position error) in *napako poteze* (angl. move error). Prva preprosto pomeni, da heuristična vrednost položaja odstopa od prave. Druga pa pomeni, da v nekem vozlišču ne izberemo poteze, ki vodi v njegovega sina z najboljšo pravo vrednostjo, kar je posledica napak položaja v sinovih tega vozlišča. Napaki sta prikazani na sliki 2. Obe vrsti napake se lahko obnašata patološko, ni pa nujno, da se to zgodi hkrati – lahko je denimo patološka le napaka položaja, napaka poteze pa ne.



Slika 2. Napaka položaja in napaka poteze

Večina preteklih raziskav s področje patologije minimaksa se je posvečala vprašanju, zakaj so modeli igre patološki, prave igre pa ne – katera lastnost, ki jo prave igre imajo, modelom manjka. Kljub mnogim razlagam pa še vedno ni povsem jasno, zakaj in v kakšnih okoliščinah natanko se patologija pojavlja. Prav tako so raziskovalci nekoliko zanemarili vprašanje, ki je do odkritja patologije pravzaprav privedlo: zakaj je preiskovanje z minimaksom koristno.

1.2. Enoagentno preiskovanje in njegova patologija

Enoagentno preiskovanje se uporablja v primerih, kjer v nasprotju z igrami za dva igralca rešitev problema išče en agent v okolju, ki mu dejavno ne nasprotuje. Že omenjeni primer enoagentnega iskanja je iskanje poti po prostoru, drug značilen primer je uganka osmih (ali večjega števila) ploščic [67], v to kategorijo pa lahko uvrstimo tudi problem trgovskega potnika [69], računalniško dokazovanje izrekov [66] itd.

Probleme enoagentnega iskanja podobno kot igre lahko predstavimo s preiskovalnim drevesom (je pa tu predstavitev z nedrevesnim grafom običajna, vendar za disertacijo to ni bistveno). Kot pri igrah so listom drevesa prirejene vrednosti, ki označujejo kakovost rešitve. Te vrednosti proti korenu namesto z minimaksom prenašamo z miniminom. Z miniminom določena povratna vrednost nekega vozlišča ni nič drugega kot minimum vrednosti listov poddrevesa tega vozlišča – ime minimin se uporablja zgolj zaradi podobnosti z minimaksom. Načeloma bi namesto minimuma lahko iskali tudi maksimum, vendar je minimum bolj običajen, ker pri enoagentnem iskanju pogosto iščemo najkrajšo pot, in ga bomo uporabljali tudi v disertaciji.

Zaradi velikosti enoagentnih preiskovalnih dreves tudi njihova vozlišča pogosto hevristično ocenimo. Oceno vozlišča x navadno zapišemo kot $f(x) = g(x) + h(x)$, pri čemer je $g(x)$ prava vrednost poti od začetnega stanja do x , $h(x)$ pa hevristična ocena poti od x do končnega stanja. Funkcijo $f(x)$ navadno imenujemo cenilka, za potrebe disertacije pa ji bomo rekli kar hevristična ocenjevalna funkcija, saj je njena vloga enakovredna vlogi hevristične ocenjevalne funkcije pri minimaksu. Prav tako bomo vrednostim, ki jih vrača, rekli hevristične vrednosti, čeprav se ta izraz navadno uporablja za vrednosti, ki jih vrača $h(x)$. Za $g(x)$ in $h(x)$ bomo uporabljali izraza točni in ocenjeni del hevristične vrednosti.

Najbolj znan algoritem za enoagentno preiskovanje je prav gotovo A* [20]. Spada med polne (angl. complete) preiskovalne algoritme, kar pomeni, da preiskovalno drevo

preiskuje toliko časa, dokler ne najde cele poti do končnega stanja, nato pa to pot v enem kosu prepotuje. Če uporablja popolno hevristično ocenjevalno funkcijo (to pomeni optimistično – o popolnosti več kasneje), je prva najdena rešitev tudi optimalna. Zaradi polnosti pri A* patologija ni mogoča, saj o različnih globinah preiskovanja niti ne moremo govoriti.

Kadar je preiskovalno drevo preveliko, da bi rešitev dovolj hitro našli s polnim algoritmom, uporabimo delen (angl. incomplete) algoritem ali algoritem s takojšnjim odzivom (angl. real-time), med katerimi je najbolj znan LRTA* (learning real-time A*) [27]. Tovrstni algoritmi drevo preiščejo do izbrane globine, vozlišča tam hevristično ocenijo, ocene prenesejo na nivo 1 in na njihovi podlagi naredijo potezo – enako kot navadno dela minimaks. Postopek ponavljajo, dokler ne dosežejo končnega stanja. Najdena rešitev ni nujno optimalna, jo pa delni algoritmi pogosto najdejo hitreje kot polni, poleg tega pa omejena globina preiskovanja lahko zagotovi, da je vsaka poteza narejena v predpisanem času. Pri takih algoritmih patologija pomeni isto kot pri minimaksu: da napaka poteze z globino preiskovanja raste. O napaki položaja namreč pri enoagentnem preiskovanju ni smiselno govoriti, ker pogosto uporabljane popolne (optimistične) hevristične ocenjevalne funkcije sistematično odstopajo od pravih vrednosti.

Poznamo dve pomembni lastnosti hevrističnih ocenjevalnih funkcij, za kateri si pri njihovem snovanju navadno prizadevamo:

1. Če je ocenjevalna funkcija popolna (angl. admissible), hevristična vrednost od prave vedno odstopa navzdol ali ji je kvečjemu enaka. Kot rečeno, to zagotavlja, da je prva rešitev, ki jo najde A*, optimalna. A* namreč vedno najprej preišče vejo preiskovalnega drevesa z najmanjšo hevristično vrednostjo in ko prvo vejo preišče do konca, je gotov, da imajo vse ostale z višjimi hevrističnimi vrednostmi še višje prave vrednosti.
2. Če je ocenjevalna funkcija monotonno nepadajoča (angl. monotonically non-decreasing), je statična hevristična vrednost nekega vozlišča večja ali enaka statični hevristični vrednosti njegovega starša. To pospeši preiskovanje, ker nam sinov vozlišča x ni treba preiskovati, če poznamo drugo vozlišče, katerega hevristična vrednost je manjša od hevristične vrednosti vozlišča x , saj vemo, da so hevristične vrednosti sinov x kvečjemu še večje.

Raziskave patologije enoagentnega preiskovanja dosti dlje od ugotovitve, da se patologija včasih pojavi, niso prišle. Zaenkrat ni znano, niti kako pogosta je niti zakaj in kdaj nastopi.

1.3. Prispevki k znanosti

V disertaciji smo s pomočjo modela preiskovanja z minimaksom, ki za prave in hevristične vrednosti položajev uporablja realna števila, najboljše do zdaj pokazali, v kakšnih okoliščinah in iz katerih razlogov je preiskovanje patološko ali koristno. Podobno smo storili tudi za enoagentno preiskovanje, le da nam tam ni uspelo ustvariti tako celovite slike kot pri minimaksu. Prispevke k znanosti lahko razčlenimo na štiri točke:

1. V preteklosti sta se pri modeliranju iger za prave vrednosti položajev pogosto uporabljala zgolj poraz in zmaga. Mi smo utemeljili, da je bolj realistično uporabiti več pravih vrednosti, in pokazali, da je za odpravo patologije dovolj, da je v

realnovrednostnem modelu statična napaka hevristične ocenjevalne funkcije pri vseh globinah preiskovanja enaka. Nepatološkost se ohrani tudi po pretvorbi realnih vrednosti v dvojiške. Ta razlaga, zakaj se v modelih patologija pojavlja, čeprav je v igrah ni, zahteva manj predpostavk o lastnostih modela od preteklih.

2. Analizirali smo, kako na patologijo vplivajo število različnih možnih vrednosti položaja, vejitev drevesa igre in stopnja odvisnosti med vrednostmi bližnjih položajev. Ugotovili smo, da preiskovanje z minimaksom krči razpon vrednosti v drevesu, kar povzroči, da se pri dovolj majhnem začetnem številu vrednosti tudi večvrednostni model vede kot patološki dvovrednostni. Pokazali smo, da večja vejitev drevesa to krčenje pospešuje, odvisnost pa zavira.
3. Pojasnili smo, da je preiskovanje z minimaksom koristno, ker medsebojni vpliv hevrističnih vrednosti bratskih vozlišč povzroči, da je napaka njihovega minimuma ali maksimuma manjša od napake samih vozlišč. Ker pri preiskovanjih do večjih globin minimum in maksimum uporabimo večkrat, je tudi napaka v korenu takrat manjša.
4. Pri enoagentnem preiskovanju smo v umetnih preiskovalnih drevesih našli dve lastnosti, ki povzročata patologijo, in ugotovili, da jo popolnost in monotona nepadajočnost hevrističnih ocenjevalnih funkcij preprečujeta. Pri iskanju poti po zemljevidih iz računalniških iger smo odkrili tri lastnosti preiskovalnega algoritma, ki povzročajo patologijo. Poleg tega smo po zgledu minimaksa pojasnili, zakaj je enoagentno preiskovanje koristno.

1.4. Organizacija disertacije

Disertacija je razdeljena na poglavja, podpoglavja in razdelke. Začne se s pregledom sorodnega dela v poglavju 2. V podpoglavju 2.1 opišemo, kako sta Beal in Nau patologijo odkrila, v podpoglavju 2.2 pa poizkuse raziskovalcev, da bi jo pojasnili. V podpoglavju 2.3 predstavimo patologijo enoagentnega preiskovanja.

V poglavju 3 obravnavamo model preiskovanja z minimaksom, pri katerem so vrednosti položajev v drevesu igre neodvisne. V podpoglavju 3.1 naš neodvisni model minimaksa predstavimo, v podpoglavju 3.2 razložimo, zakaj ni patološki, v podpoglavju 3.3 pa si ogledamo patologijo pri minimaksu z neodvisnimi vrednostmi položajev nasploh. V podpoglavju 3.4 se lotimo analize dejavnikov, ki vplivajo na patologijo, in pokažemo, kako v neodvisnem modelu nanjo vplivata število različnih možnih vrednosti položaja in vejitev drevesa igre. V poglavju 4 se posvetimo modelu minimaksa z odvisnimi vrednostmi položajev. V podpoglavju 4.1 naš odvisni model minimaksa predstavimo, v podpoglavju 4.2 pa ga primerjamo s šahovskim programom. V podpoglavju 4.3 nadaljujemo z analizo dejavnikov, ki vplivajo na patologijo, in pokažemo, kako nanjo vplivajo število različnih možnih vrednosti položaja, stopnja odvisnosti modela in vejitev drevesa igre. V poglavju 5 razložimo, zakaj je preiskovanje z minimaksom sploh koristno: v podpoglavju 5.1 to storimo na enostavnem modelu, ki ga v podpoglavju 5.2 posplošimo.

V poglavju 6 se ukvarjamo s patologijo enoagentnega preiskovanja. V podpoglavju 6.1 jo preučujemo v umetnih preiskovalnih drevesih, v podpoglavju 6.2 pa pri iskanju poti po zemljevidih iz računalniških iger. V podpoglavju 6.3 po zgledu minimaksa razložimo, zakaj je enoagentno preiskovanje koristno.

S poglavjem 7 disertacijo sklenemo in predstavimo nekaj zamisli za nadaljnje delo. Poglavje 8 je namenjeno dodatkom. V podpoglavju 8.1 najdemo seznam uporabljenih oznak, v podpoglavju 8.2 pa slovarček izrazov, ki smo jih za potrebe disertacije prevedli iz angleščine.

2. Pregled sorodnega dela

Pri pregledu sorodnega dela si bomo prizadevali za enoten pogled na področje, zaradi česar bomo v nekaterih podrobnostih odstopali od izvirnih člankov. Verjetno najbolj očiten primer takega odstopanja so oznake. Različni avtorji so namreč iste količine označevali različno, kar bomo v pregledu poenotili, izvirne oznake pa v seznamu oznak v podpoglavju 8.1 zapisali poleg naših.

2.1. Odkritje patologije minimaksa

Patologijo minimaksa sta neodvisno odkrila Dana S. Nau leta 1979 [41] in Donald F. Beal leta 1980 [6]. Najprej bomo predstavili Bealove ugotovitve, ker je njegov model preiskovanja z minimaksom preprostejši in lažje razumljiv. Iz istega razloga se bomo nanj oprli tudi pri obravnavi poizkusov razlage patologije minimaksa.

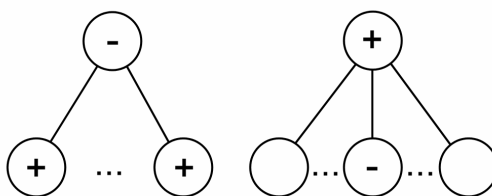
2.1.1. Bealov model

Preiskovanje z minimaksom in uporabo hevristične ocenjevalne funkcije je bilo v času Bealovih raziskav [6, 8, 9] preizkušena metoda za računalniško igranje iger. Ni pa bilo formalne razlage, zakaj so z minimaksom dobljene povratne hevristične vrednosti položajev zanesljivejše od statičnih. Beal je to skušal dognati z analizo preprostega modela preiskovanja z minimaksom, vendar je prišel do presenetljivega odkritja, da so povratne hevristične vrednosti pravzaprav manj zanesljive od statičnih.

Bealov model je temeljil na petih predpostavkah:

1. Drevo igre ima konstantno vejitev.
2. Vozlišča drevesa imajo lahko dve vrednosti: poraz in zmago (velja za prave in hevristične vrednosti).
3. Vrednosti vozlišč so razporejene tako, da je verjetnost poraza za igralca na potezi enaka na vseh nivojih.
4. Vrednosti vozlišč znotraj enega nivoja so neodvisne druga od druge.
5. Statična napaka hevristične ocenjevalne funkcije je predstavljena kot verjetnost, da se poraz zamenja za zmago ali obratno, ter je neodvisna od globine preiskovanja in prave vrednosti vozlišča.

Za opis Bealovega modela bomo uporabili predstavitev negamaks. Naj bo b vejitev drevesa igre, d globina preiskovanja in k_i verjetnost poraza na nivoju i .



Slika 3. Vrsti vozlišč v dvovrednostnem modelu negamaksa

V dvovrednostnem modelu negamaksa sta možni dve vrsti vozlišč, prikazani na sliki 3; '-' označuje poraze, '+' pa zmage. Poraz v nekem vozlišču je vedno posledica samih zmag v njegovim sinovih. Iz tega sledi enačba (1) za izračun deleža porazov na sosednjih nivojih.

$$k_i = (1 - k_{i+1})^b \quad (1)$$

Če naj bo verjetnost poraza na vseh nivojih drevesa igre enaka, kar zahteva Bealova predpostavka 3, mora veljati $k_i = c_b$ za vse i . Konstanta c_b je rešitev enačbe (1), če je $k_i = k_{i+1}$, in je odvisna le od b ; npr. $c_2 = 0,3820$. Neodvisno so jo odkrili tudi Baudet [5], Nau [41, 46] Pearl [50] ter Bratko in Gams [11], kar kaže na njen pomen pri preučevanju minimaksa. Predpostavka o konstantnem deležu porazov poenostavi izračune in obenem doseže, da so položaji v korenu drevesa zanimivi, kar pomeni, da niso z veliko verjetnostjo izgubljeni ali dobljeni za enega od igralcev.

Pri oceni položaja sta možni dve vrsti napake: poraz se lahko zamenja za zmago, čemur rečemo *zmotna zmaga* (angl. false win), ali zmaga za poraz, čemur rečemo *zmoten poraz* (angl. false loss). Naj bosta p_i in q_i verjetnosti teh dveh vrst napak na nivoju i . Beal v svojem prvem članku o patologiji [6] vrst napak ni ločeval, kasneje pa so ju ločevali tako on [7] kot tudi Bratko in Gams [11], ki sta obravnavala enak model.

Do zmotnih zmag pride v vozliščih, kjer bi vsi sinovi morali biti dobljeni, pa je eden od njih zmotno izgubljen. Verjetnost za zmotno zmago se torej izračuna z enačbo (2).

$$p_i = \frac{1}{k_i} (1 - k_{i+1})^b (1 - (1 - q_{i+1})^b) = 1 - (1 - q_{i+1})^b \quad (2)$$

Do zmotnih porazov pride v vozliščih, kjer bi nekateri sinovi morali biti izgubljeni, pa so zmotno dobljeni, od dobljenih sinov pa ni nobeden zmotno izgubljen. Verjetnost za zmoten poraz se torej izračuna z enačbo (3). Beal je uporabil enostavnejšo enačbo, ki je pri majhni napaki dober približek za pravo, spodaj zapisana pa je povzeta po Bratku in Gamsu [11].

$$q_i = \frac{1}{1 - k_i} \sum_{j=1}^b \binom{b}{j} k_{i+1}^j (1 - k_{i+1})^{b-j} p_{i+1}^j (1 - q_{i+1})^{b-j} \quad (3)$$

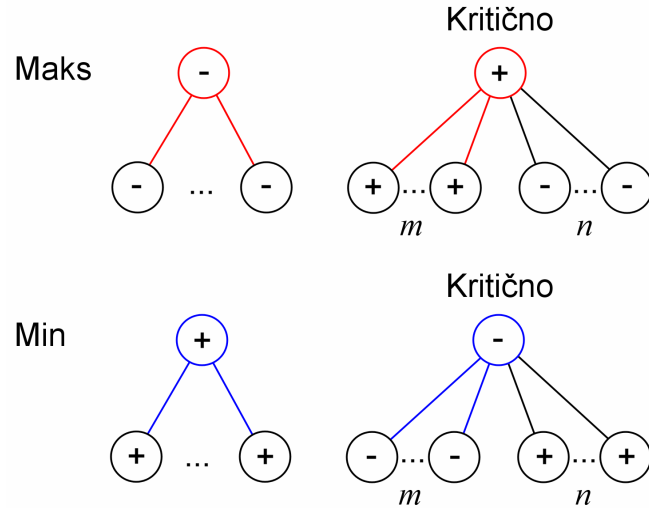
Če pri preiskovanjih do vseh globin uporabimo ista $q_d = p_d$, se izkaže, da napaka v korenu drevesa igre, izražena kot $p_0 k_0 + q_0 (1 - k_0)$, z d narašča. Beal je s poenostavitvami enačb prišel do zaključka, da vsak dodaten nivo preiskovanja prinese povečanje napake za faktor $c_b b / (1 - c_b)$, kar je pri velikih b moč aproksimirati z $\log b$.

2.1.2. Nauov model in razlaga

Naua so pri analizi minimaksa bržkone vodili podobni motivi kot Beala. Se je pa preučevanja patologije [40-43, 47] lotil temeljiteje in matematično bolj strogo. Njegov model preiskovanja z minimaksom je kompleksnejši od Bealovega, ga pa prav tako lahko strnemo v pet točk:

1. Drevo igre ima konstantno vejitev $m + n$ (m in n sta razložena kasneje).
2. Vozlišča drevesa imajo lahko dve pravi vrednosti: poraz in zmago.
3. Zaradi pravila minimaksa so vsi sinovi izgubljenih vozlišč na nivoju maks izgubljeni, dobljenih na nivoju min pa dobljeni. V ostalih vozliščih, ki se imenujejo kritična (angl. critical), razporeditev pravih vrednosti določata števili m in n : m je število sinov vozlišča, ki imajo pravo vrednost enako pravi vrednosti starša, n pa število sinov, ki imajo pravo vrednost različno od prave vrednosti starša. To je prikazano na sliki 4. Koren drevesa je vedno kritično vozlišče, sicer bi bile vse poteze v korenu enakovredne in položaj ne bi bil zanimiv.

4. Poleg števil m in n zgradbo drevesa določa še verjetnostna porazdelitev hevrističnih vrednosti. Različnih hevrističnih vrednosti je poljubno končno število med 0 in r . Njihova porazdelitev je enaka v vseh izgubljenih vozliščih in zrcalna porazdelitvi v dobljenih.
5. Napaka, na podlagi katere se določa patološkost, je verjetnost za izbiro neoptimalne poteze.



Slika 4. Vozlišča drevesa igre v Nauovem modelu minimaksa

Prva razlika med Nauovim in Bealovim modelom je v razporeditvi pravih vrednosti: Nauov model je determinističen, Bealov pa verjetnosten. Oba dosežeta, da so položaji v korenu drevesa igre zanimivi, sta pa razporeditvi pri obeh dokaj omejujoči. Druga razlika je v številu hevrističnih vrednosti, kjer je Nauov model bolj splošen in bolj podoben programom za igranje iger. In tretja razlika je v obravnavi napake. Zaradi različnih hevrističnih vrednosti je različen način uvedbe statične napake, poleg tega pa je Nau v korenu računal verjetnost za izbiro optimalne poteze (torej je upošteval napako poteze), kar je kriterij, ki je ključen v programih za igranje iger, Beal pa napako položaja. Skratka, Nauov model se zdi nekoliko bolj realističen, vendar se je kljub temu izkazalo, da je patološki.

Glavni rezultat analize opisanega modela je izrek o patologiji (4); $D_{m,n}(e, d)$ je verjetnost za izbiro optimalne poteze po preiskovanju do globine d v drevesu igre, določenem z vrednostma m in n ter hevristično ocenjevalno funkcijo e .

$$\lim_{d \rightarrow \infty} D_{m,n}(e, d) = \frac{m}{m+n} \quad (4)$$

Izrek (4) velja, kadar je izpolnjen pogoj (5); f_e je gostota porazdelitve hevristične ocenjevalne funkcije e , h in $r - h$ pa sta najmanjša in največja vrednost, ki ju ocenjevalna funkcija zavzame z neničelno verjetnostjo.

$$\min(f_e(h), f_e(r-h)) > c_{m+n} \quad (5)$$

Vrednost, ki se ji po izreku (4) približuje verjetnost optimalne poteze, je verjetnost, da optimalno potezo izberemo naključno. Razlog za naključno izbiranje pa je, da so pri velikih d hevristične vrednosti vseh sinov korena enake. To se zgodi, ker se na vsakem nivoju nabor različnih vrednosti zmanjša: na nivojih maks odpadejo najmanjše

vrednosti, na nivojih min pa največje. Pri dovolj veliki globini preiskovanja in končnem številu različnih vrednosti na koncu ostane samo ena vrednost. Taka drevesa igre je Nau imenoval patološka.

Pogoj (5) pove, da izrek (4) drži, če je vejitev drevesa igre dovolj velika. Verjetnosti $f_e(h)$ in $f_e(r-h)$, ki morata biti neničelni, namreč z naraščanjem vejitve prej ali slej presežeta c_{m+n} , ker ta z naraščanjem vejitve pada proti 0. Da je pogoj (5) izpolnjen, je bolj verjetno, če ima hevristična ocenjevalna funkcija malo vrednosti, ker je v tem primeru verjetnost za vsako izmed njih tipično večja.

Iz pogoja (5) sledi, da je za dano ocenjevalno funkcijo patoloških dreves igre neskončno, nepatoloških pa le končno mnogo. Nau je eksperimentalno ugotovil, da je tudi med drevesi, ki ne zadostijo pogoju (5), precej patoloških.

Ugotovitve o patologiji je Nau [44, 45] praktično preizkusil na Pearlovi igri (kasneje [48] imenovani tudi P-igra). To je igra, ki se igra na plošči dimenzij $b^{\lfloor d_g/2 \rfloor} \times b^{\lceil d_g/2 \rceil}$, pri čemer je d_g višina celega drevesa igre in torej tudi število potez. Polja na plošči so naključno zapolnjena z ničlami in enicami (v Nauovem primeru v razmerju c_b , ki zagotavlja, da so igre zanimive). Prvi igralec ploščo navpično razdeli na b delov in izbere enega. Drugi igralec izbrani del razdeli na b delov vodoravno itd. Igralec, ki naredi zadnjo potezo, zmaga, če izbere polje z enico. Nau je za hevristično ocenjevalno funkcijo izbral število enic na ocenjevanem delu plošče: za igralca, ki naredi zadnjo potezo, je smotrno izbrati del z največ enicami, za njegovega nasprotnika pa del z najmanj enicami. S tako ocenjevalno funkcijo se je Pearlova igra pri dovolj velikem d_g ali dovolj velikem b izkazala za patološko.

2.2. Razlogi za odsotnost patologije v igrah

2.2.1. Vejitev drevesa igre

Beal [6] in Pearl [51, 52] sta ugotovila, da je pri večjih vejitvah drevesa igre patološkost močnejša. Ne sledi pa iz njunih raziskav, da majhna vejitev patologijo lahko povsem prepreči.

Nauov [41] pogoj (5), ki spada k izreku o patologiji (4), pove, da je drevo igre patološko, če ima dovolj veliko vejitev. Podoben zaključek sledi iz posplošenega izreka o patologiji [48], ki ga bomo opisali v razdelku 2.2.4. Ne povesta pa ta dva izreka, kdaj drevo ni patološko. Rezultati Nauovih poizkusov [48] sicer kažejo, da majhna vejitev patologijo lahko prepreči, vendar to velja le za posamične primere.

Schrüfer [62] je ugotovil, da je vejitev eden izmed dveh dejavnikov, ki odločata, ali je drevo igre patološko. Njegovi izračuni kažejo, da patologija nastopi, kadar je izpolnjen pogoj (6); P_1 je verjetnost, da ima vozlišče, ki je za igralca na potezi dobljeno, natanko enega sina, ki je zanj prav tako dobljen.

$$b P_1 > 1 \tag{6}$$

Pogoj (7) pa pove, kdaj patologije ni in je torej preiskovanje z minimaksom koristno.

$$b P_1 < 1 \tag{7}$$

Michonov [39] model minimaksa se od večine modelov za preučevanje patologije razlikuje po tem, da vejitev drevesa igre ni konstantna, temveč verjetnostno porazdeljena. Avtor je ugotovil, da je pri konstantni vejitvi patologija neizogibna, v

splošnem pa ne. Kot nepatološko je izpostavil geometrično porazdeljeno vejitev, ki jo opisuje enačba (8); pg je parameter porazdelitve.

$$P(b = x) = pg(1 - pg)^x \quad (8)$$

Sadikov idr. [55, 58, 59] so v poizkusih s šahovskimi končnicami in umetnimi drevesi igre ugotovili, da se patologija pojavi, kadar je število potez, ki jih ima na voljo en igralec, bistveno večja od števila potez, ki jih ima na voljo njegov nasprotnik – da je torej vejitev neenaka. Vendar patologija nastopa le pri napaki položaja, pri napaki poteze, ki je pravzaprav važnejša, pa ne. Da si pojav razložimo, vzemimo, da ima igralec maks večjo vejitev. Izmed sinov vozlišč na svojem nivoju izbere tiste z največjimi hevrističnimi vrednostmi, ki pogosto tudi najbolj odstopajo navzgor od pravih. Na nivoju min se sicer odstopanje navzgor popravi, a ker igralec min izbira med manj vozlišči, je popravek manjši od izvirnega odstopanja. Z več nivoji preiskovanja se tako hevristična vrednost vedno bolj odmika navzgor od prave. A ker je odstopanje v vseh bratskih vozliščih približno enako močno, na napako poteze ne vpliva bistveno.

2.2.2. Število vrednosti položaja

Oba odkritelja patologije, Beal [6, 7] in Nau [41, 45, 48], sta v vseh svojih delih uporabljala dve pravi vrednosti položaja: poraz in zmago. Razlikovala pa sta se v številu hevrističnih: Beal je uporabljal dve, Nau pa poljubno končno mnogo. Iz tega je mogoče sklepati, da število hevrističnih vrednosti ne vpliva na patologijo.

Nau [47] je zapisal, da je pri hevrističnih ocenjevalnih funkcijah z več vrednostmi bolj verjetno, da do patologije ne pride, vendar je to odvisno od konkretne funkcije in ne velja splošno. Kot smo opisali v razdelku 2.1.2, se to zgodi, ker funkcije z manj vrednostmi lažje zadostijo pogoju za patološkost (5).

Bratko in Gams [11] sta preverila predpostavko 2 Bealovega modela (o dveh pravih in hevrističnih vrednostih). Dve vrednosti sta nadomestila s poljubnim številom enakomerno porazdeljenih pravih in prav toliko hevrističnih vrednosti. Kakega posebnega pomena različnim vrednostmi nista pripisala. Poročata, da je bilo obnašanje tako dopolnjenega modela enako izvirnemu Bealovemu, torej patološko.

Pearl [51, 52] je v svojih poizkusih uporabljal dve pravi in dve hevristični vrednosti in je potrdil, da se ne spremeni nič bistvenega, če se število hevrističnih vrednosti poveča ali celo postane realno.

Scheucher in Kaindl [61] sta več hevrističnih in dve pravi vrednosti potrebovala za realistično modeliranje odvisnosti med položaji, ki ga bomo opisali v razdelku 2.2.4, in realistično manjšanje statične napake z globino, ki ga bomo opisali v razdelku 2.2.5. Ta dva dejavnika sta v njunem modelu minimaksa patologijo preprečila, zato avtorja večvrednostno hevristično ocenjevalno funkcijo štejeta za ključno prepreko za patologijo.

Sadikov idr. [55, 58, 59] so v poizkusih s šahovskimi končnicami kot prave vrednosti položajev uporabili število potez do mata. Argument, da so edine ustrezne vrednosti porazi in zmage, so zavrnili z ugotovitvijo, da bi igralec, ki bi uporabljal takšne vrednosti, nasprotnika lahko matiral le po naključju, saj bi se znal le premikati med položaji, ki niso izgubljeni, ne bi pa znal dejansko zmagati.

2.2.3. Verjetnost poraza

Večina raziskovalcev se je na nek način omejila na zanimiva drevesa igre, to je taka, ki niso s preveliko verjetnostjo izgubljena za enega od igralcev. Beal [6, 7], Nau v svojem eksperimentalnem delu [45, 48] in Abramson [1] so to dosegli tako, da so predpisali, da mora biti verjetnost poraza enaka c_b . Nau v svojem teoretičnem delu [41], Schröder [62] ter Scheucher in Kaindl [61] so uporabili drugačne metode.

Bratko in Gams [11] sta v Bealovem modelu brez predpostavke 3 (o konstantnem deležu porazov) analizirala vpliv deleža porazov na patologijo. Poleg verjetnosti k_i , da je prava vrednost vozlišča na nivoju i poraz, sta definirala še verjetnost a_i , da je hevristična vrednost na nivoju i poraz. Tudi ta verjetnost se pokorava enačbi (1), na nivoju d pa se izračuna kot $a_d = q_d (1 - k_d) + (1 - p_d) k_d$. Glede na vrednost k_d sta ločila dve možnosti:

1. $k_d \neq c_b$: k_0 in a_0 sta blizu 0 ali 1 (obe spremenljivki blizu iste vrednosti), napaka v korenu je zaradi tega blizu 0 in patologije ni.
2. $k_d = c_b$: razen v posebnem primeru, ko je tudi $a_d = c_b$, je a_0 blizu 0 ali 1 in ker je $k_0 = c_b$, je napaka v korenu enaka c_b ali $1 - c_b$; ker je napaka v listih tipično manjša, patologija nastopi.

Na podlagi izračunov za več konkretnih vrednosti spremenljivk, ki vplivajo na patologijo, sta avtorja zaključila, da v Bealovem modelu večinoma nastopi, tudi če so dovoljeni različni deleži porazov.

2.2.4. Odvisnost položajev

Mnogi raziskovalci so prišli na misel, da se v večini iger položaj spreminja postopno, da ena poteza navadno položaja ne spremeni iz izgubljenega v dobljenega ali obratno. Zaradi tega so vrednosti vozlišč, ki so v drevesu igre blizu, navadno podobne.

Beal [7] je svoj osnovni model dopolnil s faktorjem grozdenja (angl. clustering factor) f , ki pomeni delež vozlišč, katerih sinovi imajo vsi enako vrednost. Posledica grozdenja je bila, da je vsak dodaten nivo preiskovanja napako spremenil za faktor, podan z izrazom (9). Ta faktor je za majhne f pozitiven, kar pomeni, da se napaka povečuje in imamo patologijo, za velike f pa negativen in je torej preiskovanje z minimaksom koristno.

$$\left(\sqrt{c_b(c_b - f + c_b f)} \right) b / (1 - c_b) \quad (9)$$

Meritve na šahovski končnici so pokazale, da je grozdenje tam dovolj veliko, da je minimaks koristen.

Bratko in Gams [11] sta predpostavila, da ima v drevesu igre del poddreves vse vrednosti enake. Znotraj takih homogenih poddreves veljata enačbi za napako (10).

$$\begin{aligned} p_i &= 1 - (1 - p_{i+2})^b \\ q_i &= (1 - (1 - q_{i+2})^b)^b \end{aligned} \quad (10)$$

Iz enačb (10) je razvidno, da napaka proti korenu homogenega poddrevesa hitro pada, če le p_d in q_d nista prevelika – natančneje, če $p_d < 1 - c_b$ in $q_d < c_b$. Koreni takih poddreves so zanesljivo ocenjena vozlišča, ki stabilizirajo preiskovanje. Naj bo s_i verjetnost za zanesljivo ocenjeno dobljeno vozlišče na nivoju i , t_i pa za izgubljeno. Za s_i in t_i veljata isti enačbi (10) kot za p_i in q_i , kar pomeni, da je zadosten pogoj za odpravo

patologije $s_d > 1 - c_b$ in $t_d > c_b$. V tem primeru zanesljivo ocenjena vozlišča iz drevesa izrinejo ostala. Potreben pogoj pa je kajpada lahko milejši, saj koreni homogenih poddreves tipično niso edina pravilno ocenjena vozlišča.

Nau [45] je Pearlovo igro, opisano v razdelku 2.1.2, spremenil v postopno (angl. incremental), torej tako, ki se ji vrednosti vozlišč spreminjajo postopoma (kasneje jo je imenoval N-igra [48]). Povezavam v drevesu igre je naključno z enako verjetnostjo pripisal vrednosti 1 ali -1 , nato pa je za vsak list seštel te vrednosti povezav na poti do korena. Listom, pri katerih je bil seštevek pozitiven, je pripisal enico, ostalim pa ničlo. Za tako odvisnost med položaji se je izkazalo, da odpravi patologijo.

Ugotovitve o odvisnosti med položaji so Naua [48] privedle do razširitve izreka o patologiji (4) na drevesa igre z odvisnimi vrednostmi, ki niso več določena s parametroma m in n . Odvisnost določa meja odvisnosti (angl. dependence bound) db , ki povezuje verjetnost, da v vozlišču x hevristična ocenjevalna funkcija zavzame svojo največjo vrednost h pri naboru omejitev C , z verjetnostjo, da se to zgodi brez omejitev. Omejitve C določajo odvisnost med vrednostmi vozlišč na nivoju, kateremu pripada vozlišče x , pri čemer je x izvzet. Povezava je zapisana z neenačbo (11).

$$P(e(x) = h \mid C) \geq \frac{P(e(x) = h)}{db} \quad (11)$$

Na podlagi te definicije delne odvisnosti lahko zapišemo posplošeni izrek o patologiji (12); $D_b(e, d)$ je verjetnost za izbiro optimalne poteze po preiskovanju do globine d v drevesu igre z vejitvijo b in hevristično ocenjevalno funkcijo e ; m_{koren} je število sinov korena, ki imajo enako pravo vrednost kot koren; $k'_i(b, k'_d)$ je verjetnost poraza na nivoju i kot funkcija vejitve in verjetnosti poraza v listih ter velja za minimaks (za negamaks velja k_i); ih pa je spodnja meja (infimum) verjetnosti, da ocenjevalna funkcija zavzame svojo največjo vrednost h .

$$P\left(D_b(e, d) = \frac{m_{\text{koren}}}{b}\right) > \left(k'_1\left(b, \frac{ih}{db}\right)\right)^b \quad (12)$$

Izrek (12) napoveduje patologijo, kadar je desna stran neenačbe velika. Za $k'_1(b, k_d)$ velja, da se z večanjem d približuje 1, če $k_d > c_b$ [46]. Iz tega lahko sklepamo, da do patologije pride, kadar je ih velik (kar se – kot smo že ugotovili – tipično zgodi, če ima ocenjevalna funkcija malo različnih vrednosti), db majhen (v drevesu ni veliko odvisnosti) ali b velik (v tem primeru je c_b majhen).

Pearl [51, 52] se je strinjal, da utegne neodvisnost vrednosti v drevesu igre povečevati patologijo. To je utemeljil z opažanjem, da je vrednost vozlišča maksimum ocen (matematičnih upanj) vrednosti njegovih sinov, statistično pravilno pa bi bilo, da bi bila vrednost vozlišča ocena (matematično upanje) maksimuma vrednosti njegovih sinov. Razhajanje med tem dvojim je največje, kadar so vrednosti med seboj odvisne. Vendar je menil, da je odvisnost, kakršno je v postopno Pearlovo igro uvedel Nau, nerealistično močna, saj je denimo pri šahu malo položajev, ki jih s slabo potezo ni mogoče pokvariti. Slednji trditvi je Kaindle [23] sicer oporekal, češ da se šahovski program večino časa ukvarja s položaji, ki so tako močno v prid eni strani, da tega z eno potezo ni mogoče spremeniti.

Bolj verjetna prepreka za patologijo so se Pearlu zdeli predčasni konci igre. Ukvarjal se je le s predčasnimi porazi, ki jih je imenoval pasti (angl. traps). Ti so tipično zanesljivo

ocenjeni in na patologijo učinkujejo domala enako kot homogena poddrevesa, s katerimi sta patologijo že pred Pearlom pojasnila Bratko in Gams. Predčasne konce uvrščamo med obliko odvisnosti položajev zato, ker nanje lahko gledamo kot na korene popolnoma homogenih poddreves, kar ponovno kaže na podobnost z delom Bratka in Gamsa. Pearl je ugotovil, da patologija izgine, če verjetnost za predčasen poraz P_t v drevesu igre zadošča neenačbi za kritično gostoto predčasnih porazov (13).

$$P_t \geq 1 - \frac{(1+b)^{\frac{1}{b}}}{b} \quad (13)$$

Pearl se ni ukvarjal z vprašanjem, koliko predčasnih porazov se pojavlja v igrah, je pa to storil Kaindl [23] s šahovskim programom Merlin. Ugotovil je, da delež predčasnih koncev igre redko doseže 1 %, navadno pa je celo pod 0,1 %, kar je vsekakor pod kritično gostoto.

V nasprotju z mnogimi drugimi raziskovalci Pearl ni obravnaval le zanimivih položajev. Je pa podoben učinek dosegel z definicijo napake: ukvarjal se je z napako poteze, pri čemer je upošteval le položaje, kjer imajo sinovi korena drevesa igre različne vrednosti. Za minimaks je značilno, da kadar je $k_d \neq c_b$ in je torej k_0 blizu 0 ali 1, je napaka v sinovih korena z redkejšo vrednostjo velika, v tistih s pogostejšo pa majhna. Zato bi se skupna napaka utegnila zdeti majhna in bi preiskovanje lahko šteli za nepatološko. Vendar je tako gledanje sporno, saj je v položajih, kjer ni vseeno, katero potezo naredimo, skupna napaka zaradi velike napake položajev z redkejšo vrednostjo kljub temu velika. Pearlova definicija napake to težavo odpravi. Zdaj lahko opišemo, kaj se zgodi, kadar P_t ne zadošča neenačbi (13). Pearl je ločil dva primera:

1. $k_d = c_{b, P_t}$; c_{b, P_t} je podobno kot c_b konstanta, pri kateri se verjetnost poraza ohranja z nivoja na nivo, le da c_{b, P_t} upošteva tudi predčasne poraze: napaka v korenu je velika – sicer še vedno manjša kot brez predčasnih porazov, a pri zmerni napaki v listih vseeno pride do patologije.
2. $k_d \neq c_{b, P_t}$: podobno kot brez predčasnih porazov je k_0 blizu 0 ali 1, vendar so sinovi korena z redkejšo vrednostjo posledica predčasnih porazov in zato pravilno ocenjeni, tako da patologije ni.

Abramson [1, 2] je v Pearlovi igri, opisani v razdelku 2.1.2, ki jo je preučeval Nau, preveril Pearlovo razlago patologije s predčasnimi konci igre. Nauovo hevristično ocenjevalno funkcijo je dopolnil z zmožnostjo takojšnjega prepoznavanja zanesljivo dobljenih položajev, ki so enakovredni predčasnim koncem: denimo vrsta samih enic pomeni zmago za igralca, ki igralno ploščo deli navpično, saj lahko vedno izbere tisti del, ki to vrsto vsebuje, s čimer zagotovi, da mu bo na koncu ostala enica. Abramson je z matematično analizo pokazal, da verjetnost, da izvirna Nauova funkcija spregleda zanesljivo dobljen položaj, z globino preiskovanja najbrž pada. Če predčasni konci igre ali zmožnost prepoznavanja zanesljivo dobljenih položajev res odpravijo patologijo, je torej patologija, ki jo je opazil Nau, pričakovana. Dopolnjena Abramsonova funkcija se je eksperimentalno izkazala za nepatološko, čeprav njena verjetnost, da zazna zanesljivo dobljen položaj, ne zadošča Pearlovi neenačbi za kritično gostoto predčasnih koncev igre (13). Avtor je to razložil z ugotovitvijo, da njegova ocenjevalna funkcija pri večjih globinah zazna več zanesljivo dobljenih položajev, Pearl pa je predpostavil, da so predčasni konci po drevesu igre razporejeni enakomerno.

Schrüfer [62] je ugotovil, da poleg vejitve o patologiji odloča verjetnost P_1 , da ima vozlišče, ki je za igralca na potezi dobljeno, natanko enega sina, ki je zanj prav tako dobljen. Kadar je v drevesu igre P_1 dovolj majhna, drevo ni patološko, sicer pa je. Zvezo med P_1 , vejitvijo in patologijo podajata neenačbi (6) in (7). Verjetnost P_1 je pomembna zato, ker je verjetnost napake v položajih, kjer je pravilna samo ena poteza, največja.

Scheucher in Kaindle [60] sta modeliranje odvisnosti položajev oprla na mirnost (angl. quiescence). Mirno vozlišče je tisto, katerega povratna hevristična vrednost je enaka statični (ali vsaj ne bistveno različna od nje). V drevesa igre sta uvedla delež vozlišč, ki so mirna *qui* nivojev ali do *qui* nivojev. Prvo pomeni, da je njihovi statični hevristični vrednosti približno enaka povratna hevristična vrednost, pridobljena s preiskovanjem *qui* nivojev v globino, drugo pa, da so ji približno enake vse vrednosti, pridobljene s preiskovanji od 1 do *qui* nivojev v globino. Napaka v takih vozliščih je bila manjša kot v nemirnih. Obe vrsti mirnosti sta v večini poizkusov odpravili patologijo.

Scheucher in Kaindle sta v kasnejših raziskavah [61] drevesa igre gradila na podoben način kot Nau v postopni Pearlovi igri. Od korena navzdol sta vozliščem pripisovala statične hevristične vrednosti, ki so se smele od vrednosti starša razlikovati le malo. V listih sta nato iz večvrednostnih hevrističnih vrednosti izračunala dvovrednostne prave: vozlišča z velikimi hevrističnimi vrednostmi sta verjetneje določila za dobljena, tista z majhnimi pa za izgubljena. Tovrstna odvisnost se je v njunem modelu minimaksa izkazala za glavni razlog za patologijo (drugi razlog pa je bila z globino padajoča statična napaka, ki jo bomo opisali v razdelku 2.2.5).

Luštrek in Gams [34] sva več razlag patologije preverila s simulacijo: naključno sva tvorila veliko število dreves igre in na njih merila patološkost. Homogena poddrevesa, kakršna sta predlagala Bratko in Gams, patologije niso odpravila. Pearlovi predčasni konci igre so patologijo sicer preprečili, a jih je bilo treba več, kot je izračunal Pearl. Prav tako je patologijo preprečilo majhno število vozlišč, ki imajo samo enega dobljenega sina, o čemer je govoril Schrüfer, a teh je bilo treba manj, kot bi bilo sklepati iz Schrüferjevega izračuna. Kaj je razlog za neskladje poizkusov z izračuni, ni jasno; povsem ne moremo izključiti tudi napake v programu za tvorbo dreves.

2.2.5. Obravnava napake

Nekateri raziskovalci so se ukvarjali z napako položaja, drugi z napako poteze. Že Beal je pomislil, da bi v njegovem modelu za patologijo utegnili biti odgovorna uporaba napake položaja.

Bratko in Gams [11] sta si obnašanje napake poteze ogledala v Bealovem modelu brez predpostavke 3 (o konstantnem deležu porazov – uporabila sta različne deleže). Izpeljala sta enačbo za napako poteze v korenu in primerjala tovrstno napako pri različnih globinah preiskovanja. Pri vseh preizkušanih kombinacijah parametrov je prišlo do patologije.

Sadikov idr. [55, 58, 59] so ugotovili, da je v šahovskih končnicah v nekaterih primerih napaka položaja patološka, napaka poteze pa ne. Njihovo delo smo podrobneje opisali v razdelku 2.2.1.

Pogosta razlaga za odsotnost patologije v igrah je bila, da je hevristična ocenjevalna funkcija nižje v drevesu igre bolj točna, ker se situacija z globino zbistri. Vendar so

strokovnjaki za programe za igranje iger menili, da to ne drži, vsaj ne v dovoljšnji meri [45].

Nau [45] je za hevristično ocenjevalno funkcijo, ki jo je uporabil pri Pearlovi igri, opisani v razdelku 2.1.2, pokazal, da se ji točnost z globino povečuje eksponentno. Kljub temu je igra pretežno patološka.

Pearl [51, 52] je izračunal, da bi se pri majhni statični napaki za odpravo patologije ta z globino morala zmanjševati nerealistično močno: pri $b = 2$ za malo več kot 50 % na vsaka dva nivoja, pri večjih vejitvah pa še močneje. To sledi iz približka za povečanje napake poteze na vsaka dva dodatna nivoja globine preiskovanja, ki ga podaja enačba (14); $ME_{i,d}$ je napaka poteze na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d .

$$ME_{0,d} \approx 1,169\sqrt{b} ME_{0,d-2} \quad (14)$$

Scheucher in Kaindl [61] sta menila, je statična napaka manj verjetna v položajih z bolj skrajno hevristično vrednostjo: če hevristična ocenjevalna funkcija za nek položaj trdi, da je zelo dober, je manj verjetno, da se moti, kot če trdi, da je neodločen. V njunem modelu minimaksa, opisanem v razdelku 2.2.4, je bilo skrajnih položajev na nižjih nivojih več, zaradi česar je bila tudi statična napaka tam manjša. Takšna statična napaka je bila poleg odvisnosti položajev zaslužna za nepatološkost modela. Vendar se ni izkazala za ključno, ker je bil model pretežno nepatološki tudi samo z odvisnostjo. O rezultatih brez odvisnosti in s spreminjajočo se statično napako žal ne poročata, ker naj bi to kombinacijo zajel že Pearl [51] patološki model. Naši rezultati, opisani v poglavju 3, kažejo, da sta se najbrž motila.

Schrüferjev [62] model je bil enak Nauovem, opisanem v razdelku 2.1.2, le da je uporabljal samo dve hevristični vrednosti. Napako je Schrüfer v njem predstavil z verjetnostma, da se poraz zamenja za zmago in obratno, ki v nasprotju s simetrično Nauovo napako v splošnem nista enaki. Zaključil je, da drevo igre z $m > 1$ ni patološko, kadar je napaka v listih dovolj majhna, sploh pa mora biti majhna verjetnost zmotnega poraza. Pogoja za odsotnost patologije sta podana z neenačbama (15).

$$p_d < \left(\frac{1}{m+n} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (15)$$

$$q_d < \left(\frac{1}{m+n} \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

Althöfer [3, 4] je potrdil Schrüferjeve rezultate. Nato je v model svojega predhodnika uvedel simetrijo napake in dokazal, da so v primerih, ko je patološki minimaks, patološki vsi algoritmi za izračun povratnih vrednosti, torej vsi algoritmi, ki določijo vrednost vozlišča na podlagi vrednosti njegovih sinov. V svojem kasnejšem delu [4] je za dokazovanje uporabil tudi zarotniška števila (angl. conspiracy numbers) [38], ki označujejo število listov (pod)drevesa igre, ki morajo spremeniti vrednost, da svojo vrednost spremeni koren. Ta števila lepo ponazarjajo občutljivost korena na napake in sta jih v ta namen kasneje uporabila tudi Doerr in Lorenz [18].

2.2.6. Povzetek

Razpredelnica 1 povzema preteklo delo s področja patologije minimaksa. V prid jedrnatosti je za vsak način obravnave patologije citirano le po eno delo. Uspešni poizkusi razlage patologije so označeni z zeleno, neuspešni pa z rdečo.

Delo	Vejitev	Število vrednosti (pravih/hevrističnih)	Verjetnost poraza	Odvisnost položajev	Obravnava napake
Beal, 1980 [6]	Konstantna	2 / 2	c_b	Ne	Napaka položaja, statična napaka konstantna
Beal, 1982 [7]	Konstantna	2 / 2	c_b	Vozlišča, katerih sinovi imajo vsi enako vrednost, preprečijo patologijo.	Napaka položaja, statična napaka konstantna
Bratko in Gams, 1982 [11]	Konstantna	2 / 2 Večje končno število obojih vrednosti ne prepreči patologije.	Različna Pri večini deležev patologija je.	Homogena poddrevesa, katerih koreni so posledično zanesljivo ocenjeni, lahko preprečijo patologijo.	Napaka položaja, statična napaka konstantna Napaka poteze ne prepreči patologije.
Nau, 1979 [41]	Konstantna Majhna vejitev utegne preprečiti patologijo (vsekakor pa jo velika povzroči).	2 / končno mnogo Veliko število hevrističnih vrednosti utegne preprečiti patologijo.	Predpisana, obravnavajo se le zanimiva drevesa	Da, le za poenostavitev izračunov	Napaka poteze, statična napaka konstantna
Nau, 1982, 1983 [45, 48] (Pearlova igra ali P- igra)	Konstantna Majhna vejitev pri majhnih drevesih prepreči patologijo.	2 / končno mnogo	c_b	Ne	Napaka poteze Padanje statične napake z globino ne prepreči patologije.
Nau, 1982, 1983 [45, 48] (postopna Pearlova igra ali N-igra)	Konstantna	2 / končno mnogo	0,5	Postopno spreminjanje vrednosti položajev prepreči patologijo.	Napaka poteze, statična napaka z globino pada

Delo	Vejitev	Število vrednosti (pravih/hevrističnih)	Verjetnost poraza	Odvisnost položajev	Obravnava napake
Pearl, 1983 [51]	Večinoma 2	2 / 2 Večje število hevrističnih vrednosti ali celo realne vrednosti ne vplivajo na patologijo.	Poljubna	Predčasni porazi lahko preprečijo patologijo.	Napaka poteze (le v zanimivih položajih), statična napaka konstantna Realistično padanje statične napake z globino ne prepreči patologije.
Michon, 1983 [39]	Ustrezno verjetnostno porazdeljena (nekonstantna) vejitev prepreči patologijo.	2 / 2	Različna	Ne	Napaka položaja
Abramson, 1986 [1]	Konstantna	2 / končno mnogo	c_b	Zaznavanje zanesljivo dobljenih položajev prepreči patologijo.	Napaka poteze, statična napaka z globino pada
Schrüfer, 1986 [62] Althöfer, 1989 [4] (za algoritme za izračun povratnih vrednosti nasploh)	Konstantna Majhna vejitev je eden od dejavnikov, ki preprečijo patologijo.	2 / 2	Deloma predpisana (obravnavajo se le zanimiva drevesa), deloma poljubna	Majhen delež zmagovitih vozlišč z natanko enim zmagovitim sinom je eden od dejavnikov, ki preprečijo patologijo.	Napaka poteze Majhna statična napaka prepreči patologijo.
Scheucher in Kaindl, 1989 [60]	Konstantna Na patologijo ne vpliva.	2 / 2	Različna	Mirni položaji z manjšo napako preprečijo patologijo.	Napaka položaja, statična napaka konstantna

Delo	Vejitev	Število vrednosti (pravih/hevrističnih)	Verjetnost poraza	Odvisnost položajev	Obravnava napake
Scheucher in Kaindl, 1998 [61]	Konstantna.	2 / 84 Večje število hevrističnih vrednosti je pomembno orodje za preprečevanje patologije.	Obravnavajo se le zanimiva drevesa	Postopno spreminjanje vrednosti položajev je glavni dejavnik, ki prepreči patologijo.	Napaka poteze (in položaja) Padanje statične napake z globino je eden od dveh dejavnikov, ki preprečita patologijo.
Sadikov, 2005 [55]	Iz šahovskih končnic Podobna vejitev obeh igralcev prepreči patologijo napake položaja.	Število potez do mata / realna števila	Ne nastopa	Da, kakršna nastopa v šahovskih končnicah	Napaka poteze in položaja, statična napaka konstantna Napaka poteze ni nikoli patološka, napaka položaja pa v nekaterih primerih je.

Razpredelnica 1. Pregled dela s področja patologije minimaksa

Iz povedanega v tem podpoglavju je očitno, da se raziskovalci niso uspeli povsem zediniti, zakaj so modeli preiskovanja z minimaksom patološki, igre pa ne. Vsi predstavljeni razlogi so bržkone resnični, vendar vsak drži pod svojimi pogoji in težko je presoditi, kateri pogoji so najbolj pravilni.

Nau [41] in Schrüfer [62] sta pokazala, da velika **vejitev drevesa igre** pripomore k patološkosti, pa tudi opažanja Beala [6] in Pearla [51] se skladajo s tem, tako da ugotovitev najbrž velja dokaj splošno. Vendar so že Nauovi poizkusi [45] s Pearlovo igro pokazali, da vejitev ne more biti edini dejavnik. Z vejitvijo se je ukvarjal tudi Michon [39], a njegovo delo je zelo teoretično in ga je težko primerjati z ostalim.

Ugotovitve o **številu vrednosti položaja** si nasprotujejo. Po eni strani se je Nau [41] nagibal k temu, da bi več hevrističnih vrednosti utegnilo preprečiti patologijo, Scheucher in Kaindl [61] pa sta več hevrističnih vrednosti sploh štela za ključno prepreko patologiji. A po drugi strani je Pearl [51] zaključil, da število hevrističnih vrednosti na patologijo ne vpliva, Bratko in Gams [11] pa sta poleg tega ugotovila, da nanjo ne vpliva niti število pravih vrednosti. Delo Scheucherja in Kaindla kaže, da je več vrednosti najbrž pomembnih predvsem kot orodje za realistično modeliranje drugih lastnosti minimaksa.

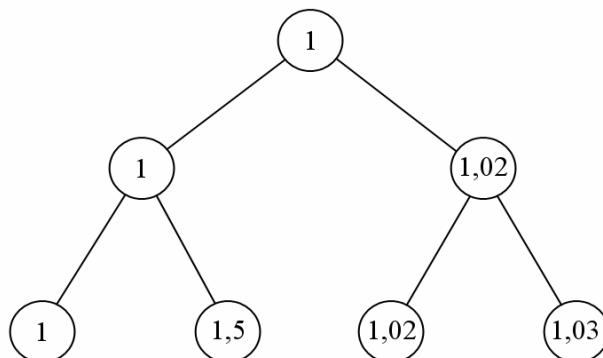
Vsi raziskovalci so si prizadevali doseči, da bi položaji v korenu njihovih dreves igre ne bili preveč v prid enemu od igralcev, kar pomeni, da so na nek način uravnavali **verjetnost poraza**. V mnogih modelih je to pomenilo, da so jo nastavili na c_b , in temu ni nihče oporekal.

Največ raziskav je zaključilo, da je neka oblika **odvisnosti položajev** tisto, kar odpravi patologijo, tako da se ta ugotovitev ne zdi sporna. So pa raziskovalci odvisnost uvažali na precej različne načine, ki jih lahko razvrstimo v tri skupine. Načini prve skupine so v drevesa igre uvedli delež zanesljivo ocenjenih vozlišč (Bratko in Gams [11], Pearl [51], Abramson [1] ter Scheucher in Kaindl v svojem zgodnjem delu [60]). Pri načinih druge skupine so se vrednosti v drevesih spreminjale postopno (Nau v postopni Pearlovi igri [45] ter Scheucher in Kaindl v kasnejšem delu [61]). V tretjo skupino pa uvrstimo izrecne omejitve glede vrednosti bratskih vozlišč (Beal [7] in Schrüfer [62]). Pomembna pomanjkljivost vseh teh raziskav je odsotnost primerjav z igrami. Najbližje igram se zdi druga skupina, edini, ki je napravil primerjavo z igro, pa je bil Beal, ki sodi v tretjo skupino, pa še on je primerjal s šahovsko končnico, ki ni najbolj splošen primer. S šahovskimi končnicami so se ukvarjali tudi Sadikov idr. [55], vendar so za odvisnost položajev le opazili, da je navzoča, kake povezave med njo in patološkostjo pa niso ugotavljali.

Obravnava napake je še eno področje, kjer se raziskovalci niso strinjali. Nau [45] in Pearl [51] sta menila, da se statična napaka z globino ne more zmanjševati dovolj, da bi odpravila patologijo, Scheucher in Kaindl [61] pa sta prav zmanjševanju statične napake pripisala pomembno vlogo pri odpravi patologije. Njun model se zdi precej realističen, a vendarle sta potrebovala tudi odvisnost položajev, tako je zmanjšujoča se statična napaka po vsem videzu lahko le podporni dejavnik.

2.3. Odkritje patologije enoagentnega preiskovanja

Patologija enoagentnega preiskovanja je precej slabše raziskana od patologije minimaksa. Odkrili so jo šele Bulitko idr. [15] leta 2003 in jo pokazali na preiskovalnem drevesu na sliki 5; števila v vozliščih so njihove prave vrednosti.



Slika 5. Drevo, na katerem so Bulitko idr. prvič pokazali patologijo enoagentnega preiskovanja

Prave vrednosti vozlišč na sliki 5 so izbrane tako, da je preiskovalno drevo patološko, statične hevristične vrednosti pa so določene 'pošteno': enakomerno so porazdeljene med pravo vrednostjo vozlišča in statično hevristično vrednostjo starša. Na ta način ima hevristična ocenjevalna funkcija obe zaželeni lastnosti: je popolna in monoton nepadajoča. Kljub temu se je drevo izkazalo za patološko.

Bulitko [12] se je ukvarjal tudi s patologijo v uganki osmih ploščic [67], standardnem problemu za preizkušanje metod enoagentnega preiskovanja. Ločil je tri vrste patologije:

1. Pri večji globini preiskovanja najdemo slabše rešitve.
2. Pri večji globini preiskovanja pregledamo manj vozlišč.
3. Pri večji globini preiskovanja pogosteje izberemo neoptimalno potezo.

Patologiji vrste 1 in 3 (ki sta med seboj tesno povezani, kar kažejo tudi Bulitkovi grafi) sta se v uganki osmih ploščic pojavili tako pri ocenjevalni funkciji, ki je bila uporabljena na drevesu s slike 5, kot pri ocenjevanju z nevronske mreže. Patologija vrste 2 ni predmet te disertacije, je pa v nasprotju z ostalima dvema vrstama koristna, če se ostali dve seveda ne pojavita. Bulitko je tudi razmišljal, da bi bilo mogoče preiskovanje bistveno izboljšati, če bi znali izbrati globino preiskovanja glede na ocenjevalno funkcijo in problem, a dlje od razmišljanja ni prišel.

Patologijo v uganki osmih ploščic so opazili tudi Sadikov idr. [56, 57]. Ugotovili so, da je šibkejša pri uporabi pesimistične hevristične funkcije, torej take, ki se obnaša ravno nasprotno od sicer zaželene popolne.

3. Patologija minimaksa z neodvisnimi položaji

Raziskovalci, ki so se s patologijo minimaksa ukvarjali v preteklosti, so se pretežno strinjali, da je za odpravo patologije potrebna odvisnost položajev. V tem poglavju pa bomo pokazali, da to ne drži nujno. V ta namen bomo uporabili model minimaksa z neodvisnimi položaji, ki ima za vrednosti položajev realna števila, in pokazali, da primerno modeliranje napake lahko samo po sebi odpravi patologijo. Nato bomo raziskali še, kako na patologijo vpliva število možnih vrednosti položaja. Večji del dognanj tega poglavja smo objavili v [32, 37].

3.1. Neodvisni realnovrednostni model minimaksa

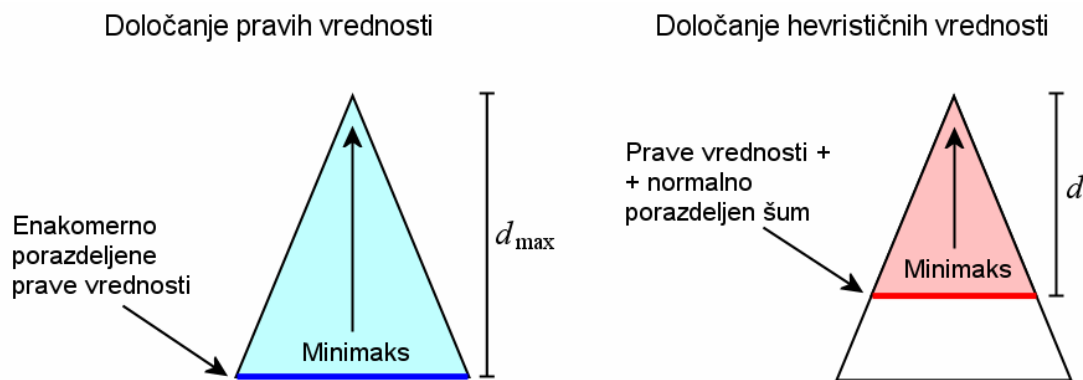
Tako programi za igranje iger kot ljudje položaje v igri navadno ocenjujejo z več vrednostmi. To je prav gotovo potrebno pri igrah, katerih končni rezultat je večvrednosten (tarok [35], othello idr.), medtem ko se v igrah, kjer je končni rezultat lahko le poraz, zmaga in morda še remi (šah, dama idr.), na prvi pogled zdi, da je več vrednosti potrebnih zgolj za izražanje negotovosti o položaju. A tudi če bi imeli neomejeno časa in bi lahko preiskali celo drevo igre, bi v izgubljenem položaju z zmotljivim in ne povsem predvidljivim nasprotnikom, proti kakršnim navadno igramo, lahko napovedali kvečjemu verjetnost poraza. V dobljenem položaju pa bi na podlagi dvovrednostnih ocen lahko zagotovili, da ne bi nikdar izgubili, a v mnogih igrah razen po naključju tudi zmagali ne bi. Npr. v šahu se ne bi znali pomikati proti matu in igra bi se najverjetneje končala zaradi izteka časa ali pravila 50 potez. Skratka, več vrednosti je potrebnih za razlikovanje med različno dobrimi dobljenimi ali izgubljenimi položaji, kar velja tako za prave kot za hevristične vrednosti. Prave vrednosti lahko definiramo kot take, ki zagotovijo, da igralec igra najbolje možno, hevristične pa so približek pravih. Kaj pomeni igrati najbolje možno, v splošnem sicer ne moremo reči: lahko pomeni čim hitreje zmagati (in so torej primerne prave vrednosti število potez do zmage [55]), v izgubljenem položaju lahko pomeni nasprotniku dati čim večjo možnost za napako itd.

Naš neodvisni model minimaksa, s katerim se bomo ukvarjali v tem poglavju, je nastal tako, da smo v Bealov model, opisan v razdelku 2.1.1, uvedli realnoštevilske vrednosti. Enako kot Bealov model ga bomo opisali s petimi točkami:

1. Drevo igre ima konstantno vejitev (enako kot pri Bealu).
2. Vozlišča drevesa imajo lahko katerokoli realno vrednost z intervala $[0, 1]$ (velja za prave in hevristične vrednosti; drugače kot pri Bealu).
3. Če realne vrednosti vozlišč pretvorimo v poraze in zmage, so razporejene tako, da je verjetnost poraza za igralca na potezi enaka na vseh nivojih (po pretvorbi enako kot pri Bealu).
4. Vrednosti vozlišč znotraj enega nivoja so neodvisne druga od druge (enako kot pri Bealu).
5. Statična napaka hevristične ocenjevalne funkcije je predstavljena kot normalno porazdeljen šum ter je neodvisna od globine preiskovanja in prave vrednosti vozlišča (od Beala se razlikuje po definiciji statične napake).

Beal je spričo enostavnosti svojega modela patologijo lahko preučeval zgolj matematično, v našem neodvisnem modelu pa je zveza med pravimi in hevrističnimi vrednostmi bolj zapletena, zato smo uporabili simulacijo: tvorili smo veliko število dejanskih dreves igre in na njih merili količine, ki so nas zanimale. Drevesu zgrajenem

po pravilih našega modela priredimo prave vrednosti v listih na nivoju $d_{\max}$. Te vrednosti so porazdeljene enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Prave vrednosti notranjih vozlišč z minimaksom izračunamo iz pravih vrednosti listov. Kadar drevo preiskujemo do globine d , tam določimo statične hevristične vrednosti. Te dobimo tako, da pravim vrednostim prištejemo normalno porazdeljen šum, ki ponazarja statično napako hevristične ocenjevalne funkcije. Hevristične vrednosti na nivojih više od d pa spet dobimo z minimaksom iz hevrističnih vrednosti na nivoju d . Postopek je prikazan na sliki 6.



Slika 6. Tvorba dreves igre po pravilih našega neodvisnega modela minimaksa

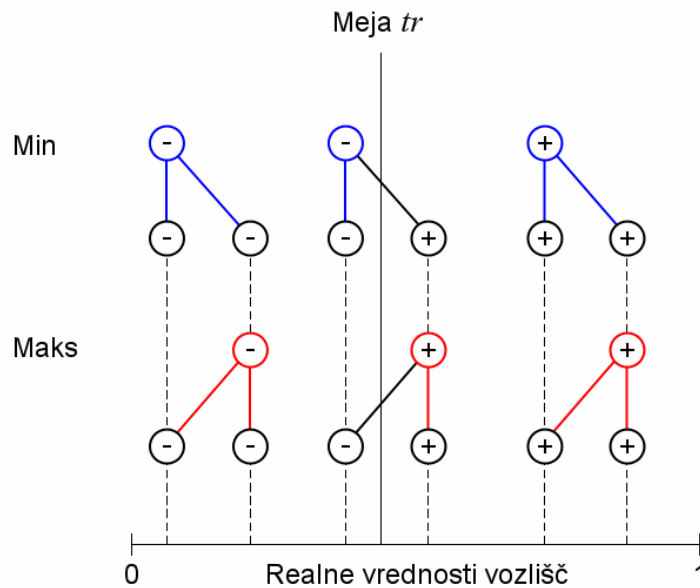
Kot smo povedali že v podpoglavju 1.1, lahko v vozlišču drevesa igre opazujemo napako položaja in napako poteze. Pri realnovrednostnih drevesih je RV (*realnovrednostna*) *napaka položaja* absolutna razlika med pravo in hevristično vrednostjo vozlišča, RV *napaka poteze* pa verjetnost za napačno potezo zaradi RV napake položaja v sinovih tega vozlišča. Nobena od teh napak ne ustreza napaki, ki jo je uporabljal Beal. On je napako definiral kot verjetnost za zamenjavo poraza za zmago ali obratno, kar bomo imenovali $2V$ (*dvovrednostna*) *napaka položaja*. Zavrlo popolnosti definirajmo še $2V$ *napako poteze*: to je verjetnost za napačno potezo v vozlišču zaradi $2V$ napake položaja v sinovih tega vozlišča. Razen pri prvem poizkusu se z $2V$ napako poteze ne bomo ukvarjali, saj se obnaša podobno kot RV napaka poteze in ni potrebna za primerjavo z Bealovim modelom. Napako najpogosteje merimo v korenu in na najnižjem nivoju preiskovanja – slednja se imenuje statična napaka.

Da lahko naš neodvisni realnovrednostni model primerjamo z Bealovim, moramo realne vrednosti pretvoriti v poraze in zmage. V ta namen uvedemo mejo tr : vrednosti pod njo pomenijo poraze, vrednosti nad njo pa zmage. Bealova predpostavka 3 narekuje, da mora biti verjetnost poraza k_i za vse i enaka c_b . Ker v nasprotju z Bealom ne uporabljamo predstavitve negamaks, se morata pri nas izmenjevati verjetnosti c_b in $1 - c_b$: na nivojih maks c_b , na nivojih min pa $1 - c_b$; izid namreč gledamo skozi oči igralca maks, ki ima na nivojih, kjer je na potezi, prednost, zato je tam verjetnost za poraz manjša. Naj bo nivo $d_{\max} - 1$ vrste min, kar pomeni, da mora biti delež porazov v listih $k_d = c_b$. Ker so vrednosti listov enakomerno porazdeljene na intervalu $[0, 1]$, ustrezen k_d dosežemo s $tr = c_b$. Čeprav vrednosti notranjih vozlišč računamo iz realnih vrednosti listov, se k_i tudi za $i < d_{\max}$ obnaša v skladu z Bealovo predpostavko 3. To se zgodi iz dveh razlogov:

1. Vrednosti listov v našem modelu se po pretvorbi v dvojiške vedejo popolnoma enako kot vrednosti v Bealovem modelu. Edino, kar je Beal predpisal za vrednosti listov, je njihova neodvisnost in verjetnost poraza c_b . V našem modelu vrednosti

listov so neodvisne. Verjetnost poraza v listu z realno vrednostjo X pa je $P(X < tr)$; če je X enakomerno porazdeljen na intervalu $[0, 1]$ in je $tr = c_b$, je to enako c_b .

2. Računanje povratnih realnih in povratnih dvojiških vrednosti je za naše potrebe enakovredno. Če na nivoju i realne vrednosti pretvorimo v dvojiške in nato z minimaksom iz teh dvojiških vrednosti izračunamo dvojiške vrednosti na nivoju $j < i$, dobimo enake vrednosti, kot če najprej z minimaksom iz realnih vrednosti na nivoju i izračunamo realne vrednosti na nivoju $j < i$ in nato te vrednosti pretvorimo v dvojiške. To kaže slika 7. Na njej so vozlišča postavljena nad mesto na vodoravni osi, ki ustreza njihovi realni vrednosti, in označena z dvojiškimi vrednostmi. Vidimo, da je pravilo minimaksa upoštevano pri realnih in pri dvojiških vrednostih ter da se pri vseh vozliščih realne vrednosti ujemajo z dvojiškimi: z '-' označena vozlišča so levo od meje, s '+' pa desno od nje.



Slika 7. Enakovrednost računanja povratnih realnih in povratnih dvojiških vrednosti z minimaksom

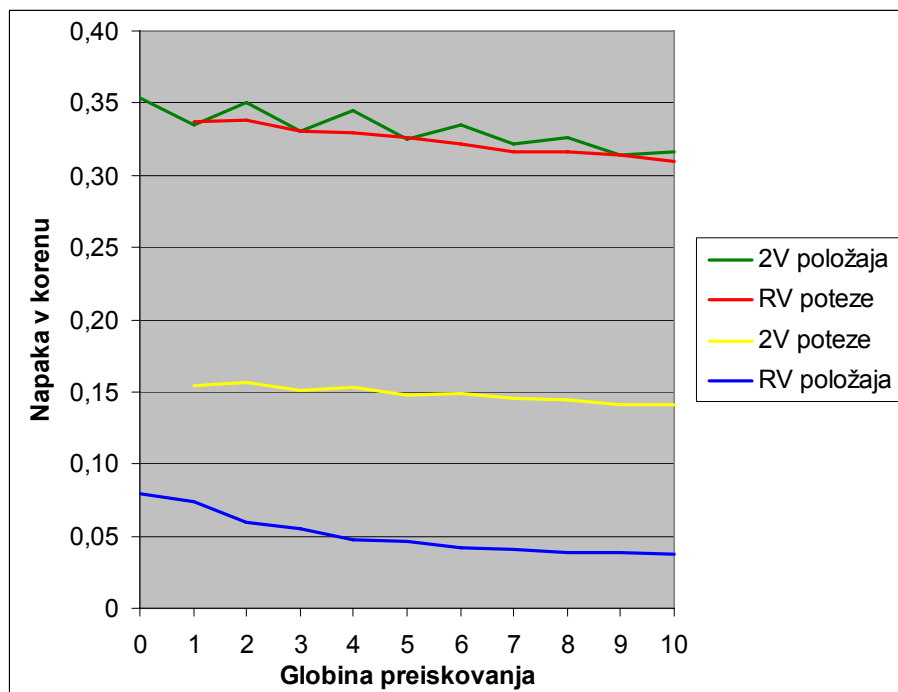
Drevesa igre, tvorjena po pravilih našega neodvisnega modela, so določena s tremi parametri:

- vejitvijo b ,
- največjo globino preiskovanja $d_{\max}$,
- standardnim odklonom normalno porazdeljenega statičnega šuma σ_e .

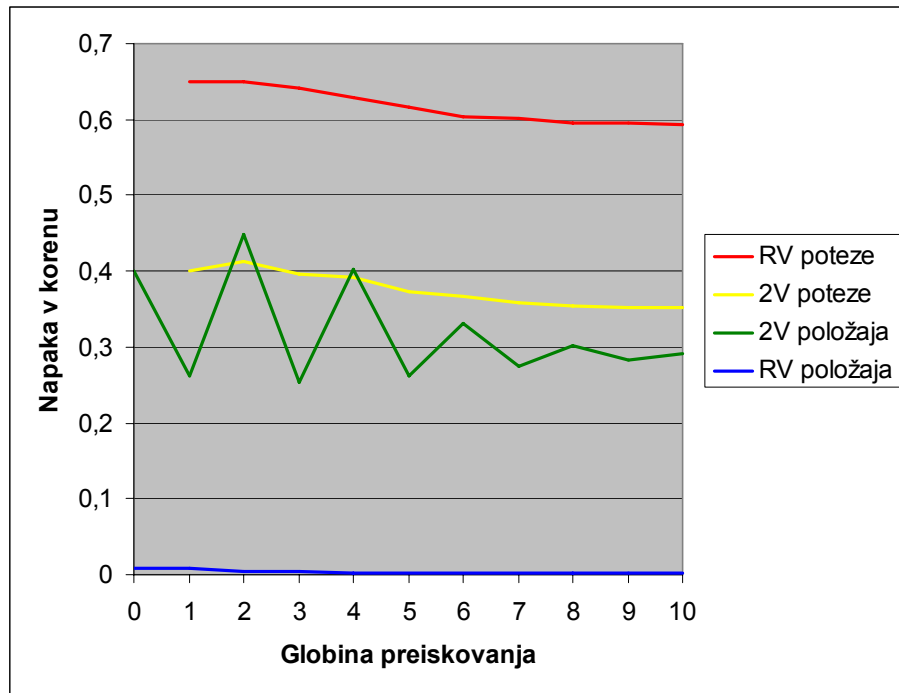
Večinoma smo uporabljali $b = 2$, saj so bili rezultati pri večjih vejitvah kvalitativno podobni, simulacija pa bistveno dolgotrajnejša. Pri $b = 2$ smo za vsak poizkus tvorili 10.000 naborov pravih vrednosti vozlišč drevesa igre in za vsak nabor pravih vrednosti še 10 naborov hevrističnih vrednosti. Ta način smo izbrali zaradi prihranka računskega časa in ker z več nabori hevrističnih vrednosti za vsak nabor pravih ponazorimo verjetnostno naravo simulirane napake hevristične ocenjevalne funkcije. Za $d_{\max}$ smo večinoma uporabljali 10, saj večje globine niso prinesle nobenih pomembnih dodatnih informacij, so pa simulacijo znatno podaljšale. Za σ_e smo pri $b = 2$ večinoma uporabljali 0,1, si bomo pa učinek drugačnih vrednosti σ_e ogledali v nadaljevanju.

3.1.1. Ugotavljanje patološkosti

Patološkost minimaksa ugotovimo tako, da pri različnih globinah preiskovanja iz povratnih pravih in hevrističnih vrednosti izračunamo napako v korenu in opazujemo, ali je pri večjih globinah večja. Slika 8 kaže vse štiri vrste napake v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri $b = 2$, $d_{\max} = 10$ in $\sigma_e = 0,1$. Slika 9 kaže isto pri $b = 5$, $d_{\max} = 10$ in $\sigma_e = 0,01$. Pri večji vejitvi smo izbrali manjši šum zato, ker tam enak šum povzroči bistveno večjo napako poteze – izbrati pravo potezo med petimi je namreč težje kot med dvema, so pa na delu še drugi dejavniki, ki jih bomo razložili v podpoglavju 3.4. Namesto 10.000 naborov pravih vrednosti smo jih pri $b = 5$ tvorili le 2.500.



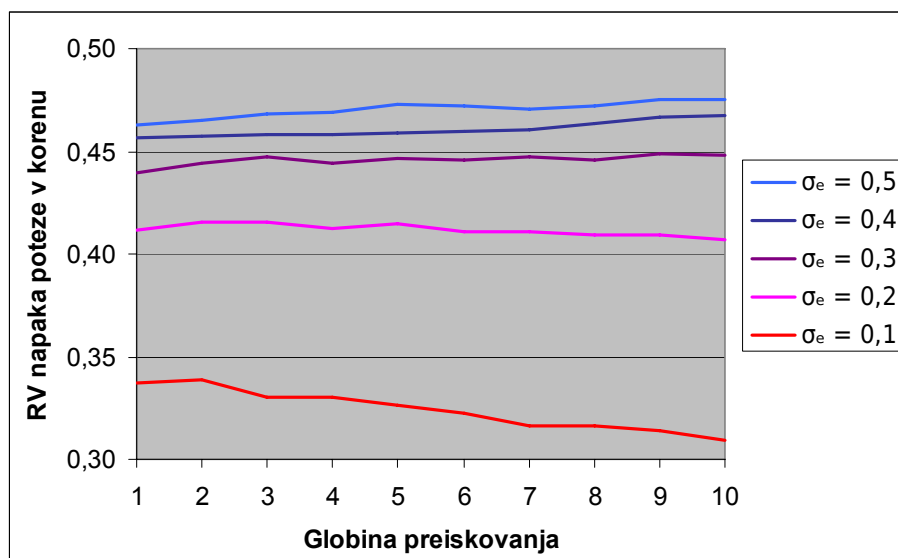
Slika 8. Napaka v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri $b = 2$ in $\sigma_e = 0,1$



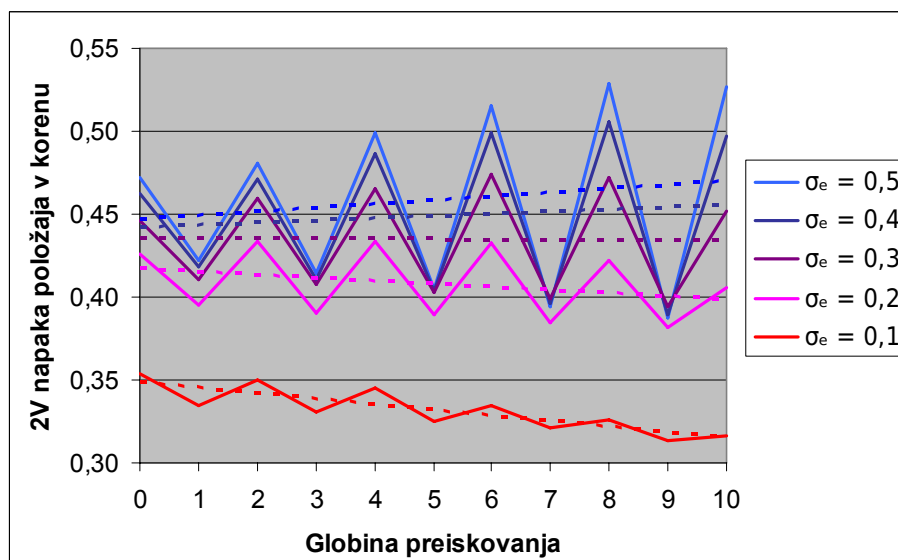
Slika 9. Napaka v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri $b = 5$ in $\sigma_e = 0,01$

Kot vidimo na slikah 8 in 9, nobena vrsta napake ni patološka (izvzemši nihanja 2V napake položaja in v manjši meri 2V napake poteze med sodimi in lihimi nivoji). Glede na podobnost našega neodvisnega modela minimaksa z Bealovim, ki je patološki, je ta rezultat presenetljiv, z njegovo razlago pa se bomo ukvarjali v podpoglavju 3.2.

Kot rečeno, $b > 2$ in $d_{\max} > 10$ nista spremenila ugotovitev glede patologije. Ne velja pa to za tretji parameter modela, velikost statične napake hevristične ocenjevalne funkcije. Izkazalo se je, da pri zelo veliki napaki do patologije lahko pride. Slika 10 kaže RV napako poteze, slika 11 pa 2V napako položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri spreminjajočem se σ_e ; $b = 2$ in $d_{\max} = 10$. Ker na sliki 11 zaradi nihanj med sodimi in lihimi nivoji ni jasno vidno, ali se patologija pojavi, so v graf vrisani tudi linearni približki.



Slika 10. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri spreminjajočem se σ_e

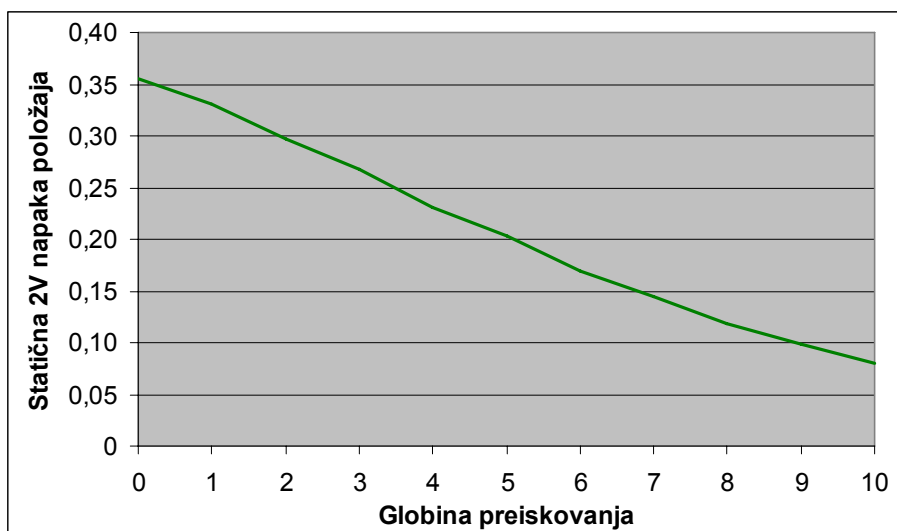


Slika 11. 2V napaka položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri spreminjajočem se σ_e

Kot vidimo na slikah 10 in 11, se patologija pojavi okrog $\sigma_e = 0,3$. A ker je tam statična napaka blizu 0,45, 0,5 pa je točka, kjer odločitve postanejo naključne, to pri hevrističnih ocenjevalnih funkcijah, kakršne srečujemo v praksi, ne bi smelo igrati vloge.

3.2. Zakaj naš neodvisni model ni patološki

Zakaj naš neodvisni model minimaksa ni patološki, glede na to, da je podoben Bealovemu? Za odgovor na to vprašanje si moramo ogledati statično 2V napako položaja. Po Bealovi predpostavki 5 bi morala biti konstantna z globino preiskovanja, v našem modelu pa to velja za statično RV napako položaja (kar dosežemo s statičnim šumom, ki ima konstanten standardni odklon). Statična 2V napaka položaja v odvisnosti od globine preiskovanja je prikazana na sliki 12; $b = 2$, $d_{\max} = 10$ in $\sigma_e = 0,1$.

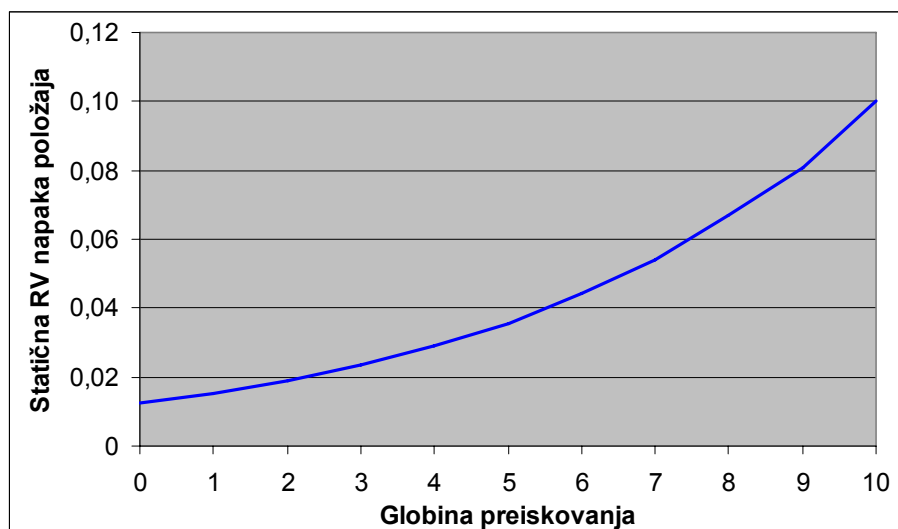


Slika 12. Statična 2V napaka položaja v odvisnosti od globine preiskovanja

Kot vidimo na sliki 12, statična 2V napaka položaja z globino preiskovanja pada, kar je v nasprotju z Bealovo predpostavko 5. Je pa statična napaka, ki se z globino zmanjšuje, dejavnik, ki utegne preprečiti patologijo.

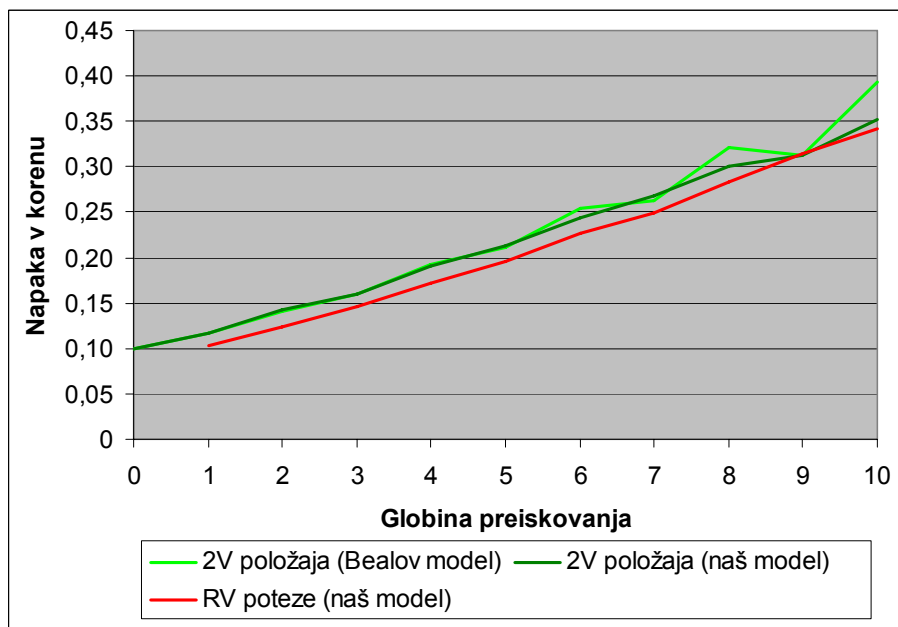
Razlaga, da z globino padajoča statična napaka odpravi patologijo, je v nasprotju s Pearlovimi [51] ugotovitvami. Pearl je namreč izračunal, da bi se pri $b = 2$ za odpravo patologije statična napaka, če bi bila majhna, morala na vsaka dva nivoja zmanjšati za približno 1,528-krat. A da Pearlov izračun drži, mora napaka biti res precej majhna. Če je statična 2V napaka položaja pri globini 10 enaka 0,1, kar je denimo vrednost, ki sta jo izbrala Bratko in Gams [11], in blizu vrednostim, s katerimi smo eksperimentirali mi, bi bila točna napaka pri globini 0 enaka 0,3932. Pearlov približek za napako pri globini 0 pa je 0,8326. Še ena neskladnost slike 12 s Pearlovim izračunom je, da na sliki napaka pada približno linearno, Pearlov izračun pa opisuje eksponentno padanje. A tudi to je le posledica netočnosti Pearlovega izračuna pri ne zelo majhnih napakah, saj smo v poizkusu s $\sigma_e = 0,01$ dobili približno eksponentno padanje.

Na sliki 13 si lahko ogledamo statično RV napako položaja v odvisnosti od globine preiskovanja pod pogoji Bealovega modela. Ti pogoji pomenijo, da je standardni odklon statičnega šuma nastavljen tako, da je statična 2V napaka položaja vedno enaka 0,1; $b = 2$ in $d_{\max} = 10$.



Slika 13. Statična RV napaka položaja v odvisnosti od globine preiskovanja, kadar je statična 2V napaka položaja pri vseh globinah enaka 0,1

Kot vidimo na sliki 13, pod pogoji Bealovega modela statična RV napaka položaja z globino preiskovanja narašča. To je prav gotovo dejavnik, ki utegne povzročiti patologijo in s katerim lahko razložimo patološkost Bealovega modela. Oglejmo si zdaj še napako v korenu pod pogoji Bealovega modela, torej da je statična 2V napaka položaja vedno enaka 0,1. Slika 14 kaže 2V napako položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja v Bealovem modelu, 2V napako položaja v korenu v našem neodvisnem modelu (po pretvorbi realnih vrednosti v dvojiške) in RV napako poteze v korenu v našem modelu; $b = 2$ in $d_{\max} = 10$.



Slika 14. Napaka v korenu, kadar je statična 2V napaka položaja pri vseh globinah enaka 0,1

Kot vidimo na sliki 14, pod Bealovimi pogoji pride do patologije RV napake poteze (ki je ključno merilo za koristnost preiskovanja z minimaksom v našem neodvisnem

modelu) in 2V napake položaja (ki jo je uporabljal Beal). 2V napaka položaja v našem modelu se precej dobro ujema z napako v Bealovem modelu. Ujemanje ni popolno, ker v listih našega neodvisnega modela v nasprotju z Bealovim verjetnost za zmotno zmago ni enaka verjetnosti za zmotni poraz. Do zmotne zmage pride, kadar vrednost z intervala $[0, tr)$ preskoči mejo tr , do zmotnega poraza pa, kadar se to zgodi vrednosti z intervala $(tr, 1]$. Ker je $tr = c_b < 0,5$, je prvi interval manjši, vrednosti na njem so v povprečju bliže meji in verjetnost za zmotno zmago je tako večja. Razmerje verjetnosti za zmotno zmago : verjetnosti za zmotni poraz je $(1 - tr) : tr$. Če naj bo skupna 2V napaka položaja 0,1, morata v Bealovem modelu držati enačbi (16).

$$\frac{p_d}{q_d} = \frac{1 - tr}{tr} \quad (16)$$

$$p_d k_d + q_d (1 - k_d) = p_d tr + q_d (1 - tr) = 0,1$$

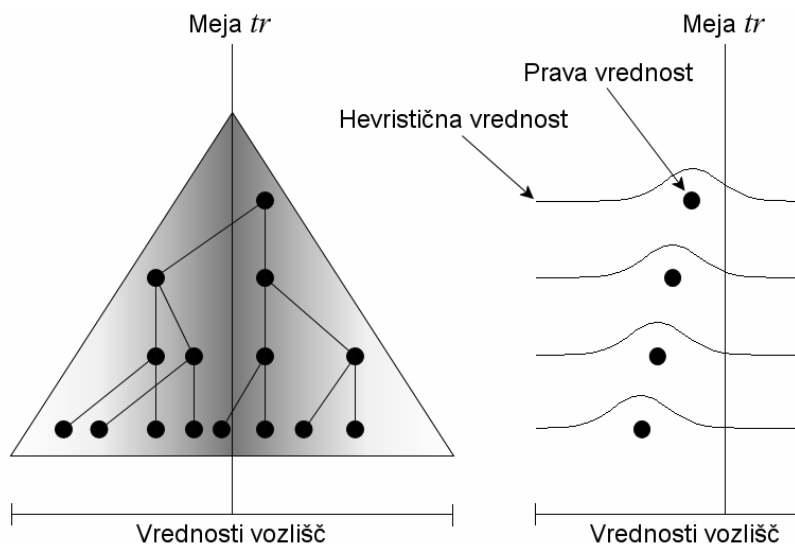
Ker iz prve enačbe sledi, da je $p_d tr = q_d (1 - tr)$, zlahka vidimo, da sta ustrezni vrednosti za statično 2V napako položaja v Bealovem modelu $p_d = 0,05 / tr$ in $q_d = 0,05 / (1 - tr)$. Bealov model s takšno statično napako se popolnoma ujema z našim in je seveda še vedno patološki (kot naš na sliki 14).

Podpoglavje lahko sklenemo z ugotovitvijo, da je Beal privzel, da je z globino preiskovanja konstantna statična 2V napaka položaja, mi pa, da je konstantna statična RV napaka položaja. Ti predpostavki se zdita enakovredni, a si v resnici nasprotujeta. Rezultat prve je patologija, pri drugi pa se preiskovanje z minimaksom izkaže za koristno.

3.3. Je nepatološkost pričakovati v splošnem?

Naša naloga je dognati, ali je bolj realistična konstantna statična RV napaka položaja ali konstantna statična 2V napaka položaja. Programi za igranje iger uporabljajo večvrednostne hevristične ocenjevalne funkcije in statična RV napaka položaja najbolj neposredno predstavi napako takih funkcij. Ne zdi se verjetno, da bi se ta napaka z globino preiskovanja povečevala, kot kaže slika 13 (to zahteva Bealova predpostavka 5). Toda ali se statična 2V napaka položaja obnaša, kot kaže slika 12 (to pa zahteva naš neodvisni model minimaksa)? V tem podpoglavju bomo pokazali, da je odgovor pritrdilen.

Z 2V napako se sicer programi za igranje iger ne ukvarjajo, a če bi se, si ni težko predstavljati, da bi bila ta napaka v negotovih položajih, katerih realna vrednost je blizu meje med porazi in zmagami, velika, v gotovih položajih daleč od meje pa majhna. Če naj bo položaj v korenu drevesa igre zanimiv, torej če naj imata oba igralca primerljive možnosti za zmago, mora biti realna vrednost korena blizu meje. Vsak nivo nižje se od začetnega položaja oddaljimo za eno potezo. Ker se vrednost položaja navadno spreminja postopno, nas torej vsak nivo lahko prinese dlje od vrednosti korena. To pa pomeni, da imajo vozlišča nižje v drevesu vrednosti lahko bolj oddaljene od meje. Isti šum teže potisne čez mejo vrednost, ki je od nje bolj oddaljena, zato je 2V napaka na nižjih nivojih manjša. Do podobnega zaključka sta prišla že Scheucher in Kaindl [61]. Z globino naraščajoči odmik vrednosti vozlišč od meje je prikazan na sliki 15; na levi strani temnejše območje ponazarja večjo verjetnost napake; na desni strani je za vsak nivo drevesa oddaljenost prave vrednosti vozlišča od meje enaka povprečju razdalj na levi strani.



Slika 15. Oddaljenost vrednosti vozlišč od meje med porazi in zmagami ter njen vpliv na 2V napako

V nadaljevanju bomo matematično pokazali, da je pri konstantni statični RV napaki položaja statična 2V napaka položaja v zgornjem delu drevesa igre toliko večja kot v spodnjem, da se patologija ne pojavi. Vrednosti vozlišč bomo omejili na interval $[0, 1]$, s čimer ne izgubimo splošnosti, saj je vanje moč preslikati vrednosti s poljubnega intervala. V prid enostavnosti se bomo omejili na $b = 2$.

3.3.1. Statična dvovrednostna napaka položaja više je večja

Najprej si oglejmo lažne poraze. Naj se lažni poraz zgodi v vozlišču s pravo prednostjo X in hevristično vrednostjo $X - err$, pri čemer je err RV napaka položaja v tem vozlišču. Lažni poraz pomeni, da je prava vrednost vozlišča zmaga, torej $X > tr$, hevristična pa poraz, torej $X - err < tr$. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je definirana kot $F(x) = P(X < x)$. To pomeni, da verjetnost za lažni poraz v vozlišču, katerega prava vrednost je porazdeljena s funkcijo $F(x)$, opisuje enačba (17).

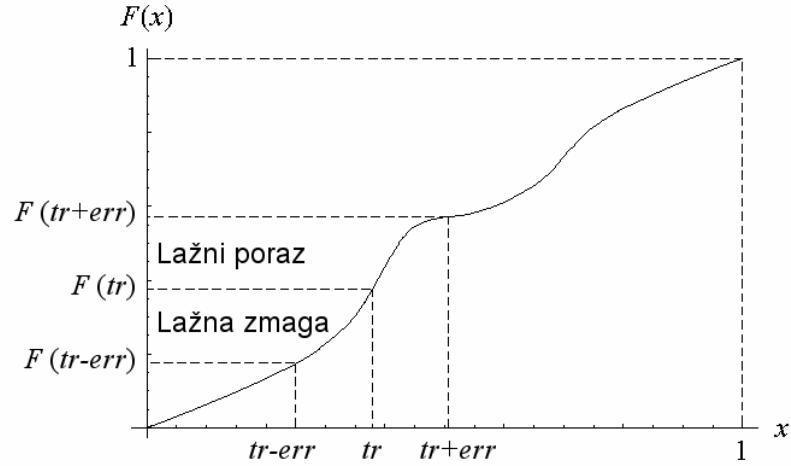
$$P(X > tr \wedge X - err < tr) = P(tr < X < tr + err) = F(tr + err) - F(tr) \quad (17)$$

Lažna zmaga v vozlišču pomeni, da je prava vrednost vozlišča poraz, hevristična pa zmaga, torej $X < tr$ in $X + err > tr$. Takšna napaka se zgodi z verjetnostjo, ki jo opisuje enačba (18).

$$P(X < tr \wedge X + err > tr) = P(tr - err < X < tr) = F(tr) - F(tr - err) \quad (18)$$

Celotna 2V napaka položaja je vsota verjetnosti za lažni poraz in za lažno zmago ter je podana z enačbo (19). Kako je 2V napaka položaja izražena s porazdelitveno funkcijo, kaže tudi slika 16.

$$2VPE = F(tr + err) - F(tr) + F(tr) - F(tr - err) = F(tr + err) - F(tr - err) \quad (19)$$



Slika 16.2V napaka položaja, izražena s porazdelitveno funkcijo vrednosti vozlišč drevesa igre

Oglejmo si zdaj, kako se porazdelitev pravih vrednosti vozlišč spreminja z nivoji drevesa igre. Naj bo $F_i(x)$ porazdelitvena funkcija na i -tem nivoju. Če je $i - 2$ nivo maks, je verjetnost, da je vrednost vozlišča na nivoju $i - 2$ manjša od nekega x , enaka verjetnosti, da sta vrednosti obeh sinov tega vozlišča manjši od x . Torej se $F_{i-2}(x)$ iz $F_{i-1}(x)$ izračuna po enačbi (20).

$$F_{i-2}(x) = P(X_{i-2} < x) = (P(X_{i-1} < x))^2 = (F_{i-1}(x))^2 \quad (20)$$

Na nivojih min je izračun podoben. Če je $i - 1$ nivo min, je verjetnost, da je vrednost vozlišča na nivoju $i - 1$ večja od nekega x , enaka verjetnosti, da sta vrednosti obeh sinov tega vozlišča večji od x . Torej se $F_{i-1}(x)$ iz $F_i(x)$ izračuna po enačbi (21).

$$\begin{aligned} F_{i-1}(x) &= P(X_{i-1} > x) = 1 - P(X_{i-1} < x) = \\ &= 1 - (P(X_i > x))^2 = 1 - (1 - P(X_i < x))^2 = 1 - (1 - F_i(x))^2 \end{aligned} \quad (21)$$

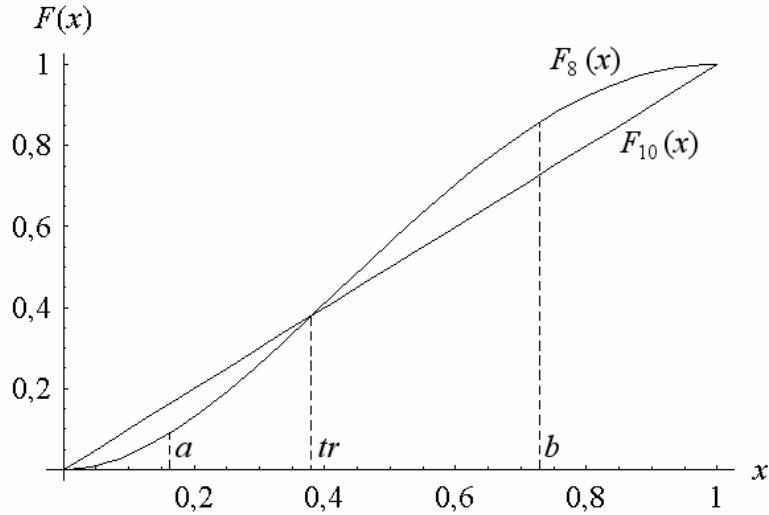
Da lahko izračunamo $F_{i-2}(x)$ iz $F_i(x)$ v enem koraku, enačbi (20) in (21) združimo v enačbo (22). Nivo maks smo se odločili postaviti nad nivo min, a če bi ju zamenjali, to na naše zaključke ne bi vplivalo.

$$\begin{aligned} F_{i-2}(x) &= (F_{i-1}(x))^2 = (1 - (1 - F_i(x))^2)^2 = \\ &= 4(F_i(x))^2 - 4(F_i(x))^3 + (F_i(x))^4 \end{aligned} \quad (22)$$

Spomnimo se, da je naš cilj pokazati, da je statična 2V napaka položaja v zgornjem delu drevesa igre manjša kot v spodnjem. Za nivoja $i - 2$ in i to izraža neenačba (23); $2VPE_{i,d}$ označuje 2V napako položaja na i -tem nivoju drevesa po preiskovanju do globine d in je s porazdelitvenima funkcijama zapisana v enačbi (19).

$$\begin{aligned} 2VPE_{i-2,i-2} &> 2VPE_{i,i} \\ F_{i-2}(tr+err) - F_{i-2}(tr-err) &> F_i(tr+err) - F_i(tr-err) \end{aligned} \quad (23)$$

Neenačba (23) pomeni, da je razlika med vrednostma porazdelitvene funkcije v točkah $tr+err$ in $tr-err$ večja na višjih nivojih – z drugimi besedami, da je porazdelitvena funkcija na višjih nivojih bolj strma. Vzemimo za primer naš neodvisni model minimaksa: vrednosti listov so porazdeljene enakomerno in $d_{\max} = 10$, kar pomeni, da $F_{10}(x) = x$. S pomočjo enačbe (22) izračunamo $F_8(x) = 4x^2 - 4x^3 + x^4$. Slika 17 kaže $F_8(x)$ in $F_{10}(x)$ v našem modelu.



Slika 17. Porazdelitveni funkciji vrednosti vozlišč drevesa igre na nivojih 8 in 10 v našem neodvisnem modelu minimaksa

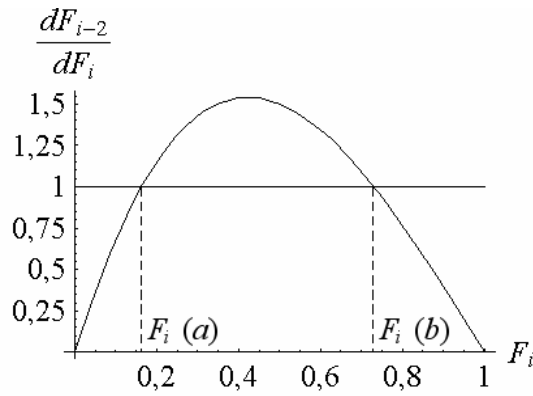
Na sliki 17 lahko vidimo, da je $F_8(x)$ od $F_{10}(x)$ bolj strma med točkama $x = a$ in $x = b$. $F_{i-2}(x)$ je prav gotovo bolj strma od $F_i(x)$, kadar je njen odvod večji od odvoda $F_i(x)$. Kdaj se to zgodi, želimo dognati neodvisno od $F_{i-2}(x)$, zato $F_{i-2}(x)$ izrazimo z $F_i(x)$, kar nam da neenačbo (24); funkcija $F_i(x)$ je zapisana kot F_i .

$$\frac{dF_{i-2}(F_i)}{dF_i} > \frac{dF_i}{dF_i}$$

$$\frac{d(4F_i^2 - 4F_i^3 + F_i^4)}{dF_i} > \frac{dF_i}{dF_i} \quad (24)$$

$$8F_i - 12F_i^2 + 4F_i^3 > 1$$

Izraz $dF_{i-2}(F_i) / dF_i$ v odvisnosti od F_i je prikazan na sliki 18 in nam pomaga pri reševanju neenačbe (24). Ugotovimo, da je $0,1624 < F_i < 0,7304$, pri čemer je $0,1624 = F_i(a)$ in $0,7304 = F_i(b)$. Števili a in b sta odvisni od $F_i(x)$, zato ju v splošnem ne moremo izračunati. Za primer na sliki 17 velja $F_{10}(x) = x$, zato je $a = F_{10}^{-1}(0,1624) = 0,1624$ in $b = F_{10}^{-1}(0,7304) = 0,7304$. Lahko pa za vsako porazdelitev pravih vrednosti vozlišč drevesa igre $F_i(x)$ trdimo, da če vrednosti $F_i(tr - err)$ in $F_i(tr + err)$ ležita na intervalu $[0,1624, 0,7304]$, je 2V napaka položaja na nivoju $i - 2$ večja kot na nivoju i . Pa je pričakovati, da bosta ti dve vrednosti res ležali na najdenem intervalu? Spomnimo se, da je $F_i(tr) = P(X_i < tr) = k_i$, k_i pa je verjetnost poraza za igralca na potezi, ki mora biti po predpostavki 3 našega neodvisnega modela enaka za vse i . Vrednost k_i lahko razumemo tudi kot kakovost položaja za igralca na potezi. Ta kakovost se z nivoja na nivo ohranja tako, da je igralec na potezi v primerjavi z nasprotnikom ravno toliko na slabšem, da s svojo potezo to uravnoteži in je po njej enako na slabšem nasprotnik. Zaradi tega lahko domnevamo, da je $F_i(tr)$ težko zelo velika ali zelo majhna in da torej zadošča pogoju $0,1624 < F_i(tr) < 0,7304$. Če napaka err ni zelo velika, isto velja tudi za $F(tr - err)$ in $F(tr + err)$. To potrjujejo eksperimentalni rezultati na slikah 10 in 11: pri veliki napaki se je patologija pojavila, sicer pa ne.



Slika 18. Izraz dF_{i-2} / dF_i v odvisnosti od F_i

3.3.2. Statična dvovrednostna napaka položaja više je dovolj večja

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da je statična 2V napaka položaja na višjih nivojih drevesa igre v glavnem večja kot na nižjih. Pa je dovolj večja? Iz Bealovih opažanj, opisanih v razdelku 2.1.1, vemo, da se 2V napaka položaja od listov proti korenu večja. Da se ognemo patologiji, mora biti torej statična napaka pri večjih globinah preiskovanja toliko manjša, da izniči večanje, ki ga je odkril Beal. Mejna točka je statična 2V napaka položaja, pri kateri minimaks ni ne patološki in ne koristen. Dobimo jo tako, da pri preiskovanju do nivoja $d_{\max}$ z enačbama (2) in (3) izračunamo verjetnost lažnega poraza p_i in verjetnost lažne zmage q_i za vse i ter nato te vrednosti uporabimo kot statične napake p_d in q_d pri preiskovanju do nivojev $d < d_{\max}$. Taki statični 2V napaki položaja bomo rekli nevtralna in z njo zagotovimo, da je napaka v korenu enaka za vse globine preiskovanja. Naš cilj je pokazati, da statična 2V napaka položaja v našem neodvisnem modelu minimaksa od listov proti korenu narašča hitreje od nevtralne napake. V našem modelu statično 2V napako položaja na nivoju $i - 2$ (imenujmo jo P_m) povzroči RV napaka položaja err uvedena na tem nivoju. Pokazati moramo torej, da je P_m večja od nevtralne napake na nivoju $i - 2$ (imenujmo jo P_n). P_n bomo izračunali iz statične 2V napake položaja, ki bi jo povzročila RV napaka položaja err uvedena na nivoju i .

P_m izračunamo tako, da v enačbo (19) vstavimo $F_{i-2}(x)$, izračunan z enačbo (22), kar nam da enačbo (25).

$$\begin{aligned}
 P_m &= 2VPE_{i-2, i-2} = F_{i-2}(tr + err) - F_{i-2}(tr - err) = \\
 &= 4(F_i(tr + err))^2 - 4(F_i(tr + err))^3 + (F_i(tr + err))^4 - \\
 &\quad - (4(F_i(tr - err))^2 - 4(F_i(tr - err))^3 + (F_i(tr - err))^4)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Kot rečeno, P_n izračunamo z enačbama (2) in (3), pri čemer je najbolj praktično uporabiti kar oznake iz razdelka 2.1.1. Rezultat je enačba (26). Ker sta enačbi (2) in (3) namenjeni predstavitvi negamaks, mi pa uporabljamo običajni minimaks, in ker je nivo $i - 1$ vrste min, moramo p_{i-1} in q_{i-1} zamenjati, k_{i-1} pa nadomestiti z $1 - k_{i-1}$.

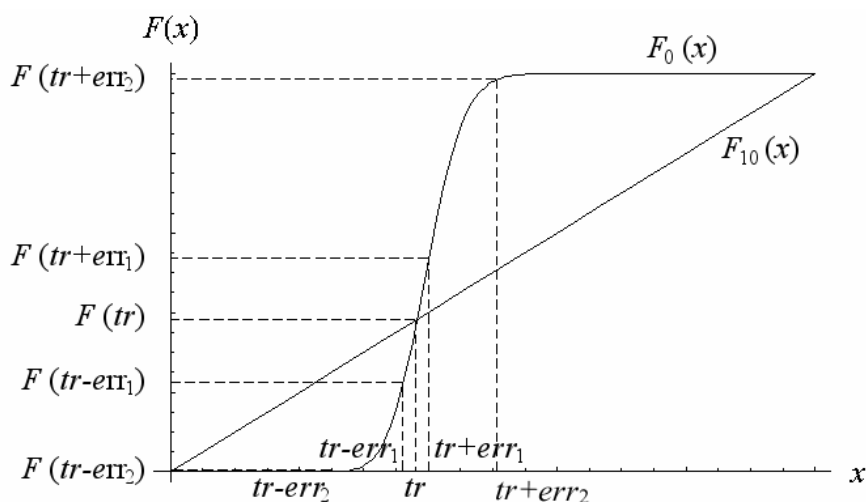
$$\begin{aligned}
 P_n &= p_{i-2}k_{i-2} + q_{i-2}(1 - k_{i-2}) = \\
 &= \frac{k_{i-1}^2(1 - (1 - p_{i-1})^2)}{k_{i-2}}k_{i-2} + \frac{2(1 - k_{i-1})k_{i-1}q_{i-1}(1 - p_{i-1}) + (1 - k_{i-1})^2q_{i-1}^2}{1 - k_{i-2}}(1 - k_{i-2})
 \end{aligned} \tag{26}$$

Spremenljivke p_{i-1} , q_{i-1} , k_{i-1} in k_{i-2} v enačbi (26) je s pomočjo enačb (1), (2) in (3) moč izraziti s spremenljivkami p_i , q_i in k_i , kar nam da enačbe (27). Celotne enačbe (26),

izražene s spremenljivkami nivoja i , nismo zapisali, ker bi bila spricho dolžine komaj berljiva.

$$\begin{aligned}
 p_{i-1} &= \frac{2k_i(1-k_i)p_i(1-q_i) + k_i^2 p_i^2}{k_{i-1}} \\
 q_{i-1} &= \frac{(1-k_i)^2(1-(1-q_i)^2)}{(1-k_{i-1})} \\
 k_{i-1} &= 1 - (1-k_i)^2 \\
 k_{i-2} &= k_{i-1}^2
 \end{aligned} \tag{27}$$

Naš končni cilj je rešiti neenačbo $P_m > P_n$. V ta namen spremenljivke p_i , q_i in k_i zapišemo kot $F(tr) - F(tr - err)$, $F(tr + err) - F(tr)$ in $F(tr)$. Ker je neenačba treh spremenljivk pretrd oreh, jo poenostavimo s približkom $F(tr) \approx (F(tr - err) + F(tr + err)) / 2$. Ta približek je dober za funkcije, ki so med $tr - err$ in $tr + err$ približno linearne. Domnevamo, da je vsaj pri majhnih napakah err ustrezen za večino porazdelitvenih funkcij, s kakršnimi imamo opraviti v igrah. Slika 19 točnost približka ilustrira na $F_{10}(x)$ in $F_0(x)$ v našem neodvisnem modelu minimaksa. Približek je očitno povsem točen za popolnoma linearno $F_{10}(x)$. Za $F_0(x)$ je dokaj dober pri majhni napaki (err_1), pri veliki napaki (err_2) pa se poslabša.



Slika 19. Točnost približka $F(tr) \approx (F(tr - err) + F(tr + err)) / 2$ v našem neodvisnem modelu minimaksa

Neenačbo $P_m > P_n$ smo analitično rešili z računskim programom Mathematica [70]. Izkazalo se je, da drži vedno ali z drugimi besedami, da minimaks s konstantno statično RV napako položaja nikoli ne bi smel biti patološki. To je v nasprotju s poizkusi iz razdelka 3.1.1, kjer je pri veliki napaki patologija nastopila. A zaradi uporabljenega približka za $F(tr)$ vemo, da dokaz pri veliki napaki ni nujno pravilen, kar so poizkusi zgolj potrdili.

3.4. Med realnimi in dvojiškimi vrednostmi

Do zdaj smo govorili predvsem o realnovrednostnem in dvovrednostnem modelu minimaksa. Programi za igranje iger pa uporabljajo množico diskretnih vrednosti položajev, tako da pravzaprav nobeden od teh dveh modelov ni realističen. V tem

podpoglavju bomo obravnavali model z več diskretnimi vrednostmi. Za osnovo mu služi naš neodvisni realnovrednostni model. Interval, na katerem ležijo vrednosti vozlišč v realnovrednostnem modelu, razdelimo na več podintervalov, za vrednost vozlišča pa vzamemo sredino podintervala. Število podintervalov bomo imenovali zrnatost modela in jo označili z g .

Najočitnejša pretvorba realnovrednostnega modela v večvrednostnega je z razdelitvijo intervala, na katerem ležijo realne vrednosti (v našem primeru $[0, 1]$), na podintervale enake dolžine. Vendar to privede do težave, ki jo najlažje opišemo na primeru $g = 2$; v prid jedrnatosti privzemimo še, da je drevo igre sode višine. Če bi razdelitev na enako dolge podintervale uporabili pri našem neodvisnem modelu, bi dobili model enakovreden Bealovemu, le da se v njem ne bi izmenjevali verjetnosti poraza c_b in $1 - c_b$ (pri Bealu je bila zaradi predstavitve negamaks verjetnost kar stalno c_b), ampak bi bila verjetnost poraza v listih 0,5, na višjih nivojih pa vedno bližje 1. To pomeni, da položaj v korenu ne bi bil zanimiv, ker bi bil za igralca na potezi z veliko verjetnostjo izgubljen. Poleg tega bi težko prišlo do napake poteze, ker bi bili tudi vsi sinovi korena z veliko verjetnostjo izgubljeni. Podobno bi se godilo pri $g > 2$, le da vrednost korena ne bi konvergirala proti porazu, temveč proti podintervalu, ki bi vseboval c_b [50].

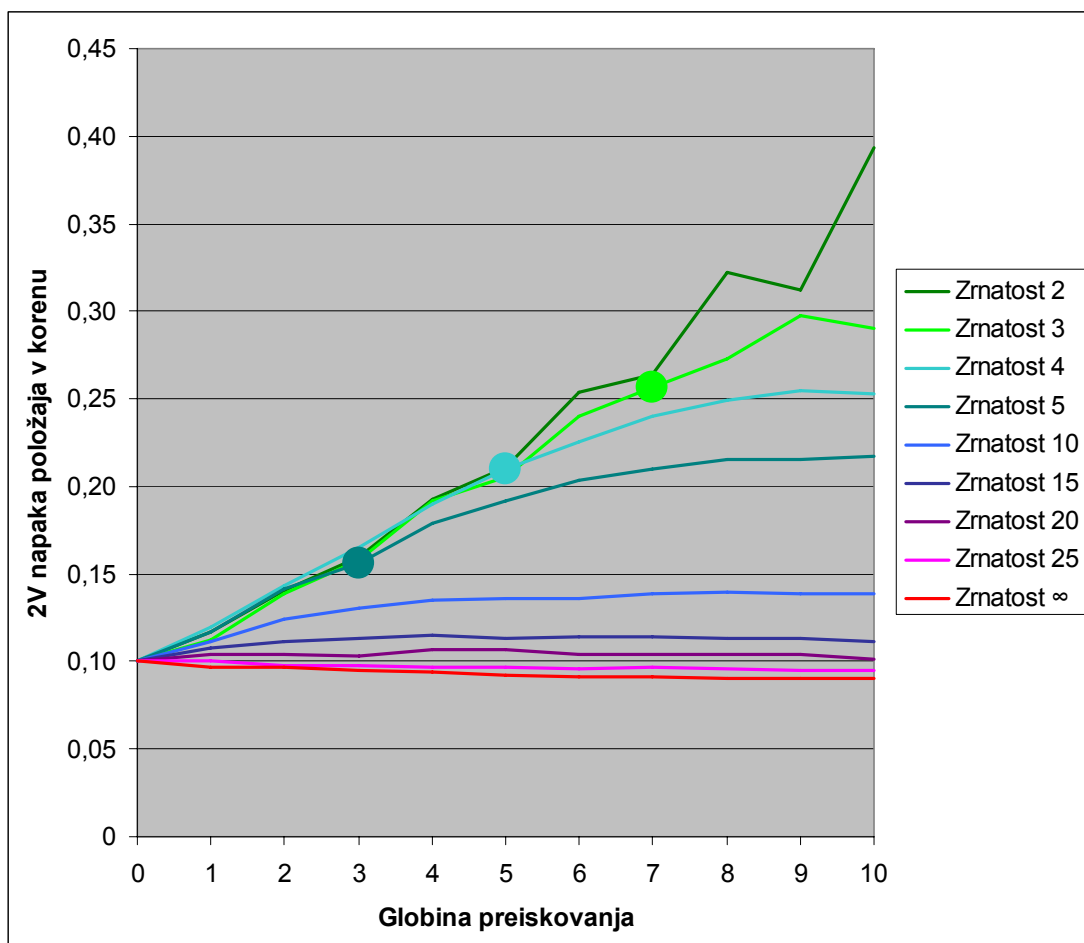
Da je naš večvrednostni model minimaksa z $g = 2$ zanimiv, dosežemo tako, da mejo med podintervaloma z 0,5 premaknemo na c_b : tak model je enakovreden Bealovemu. Kadar $g > 2$, na c_b premaknemo mejo med podintervali, ki je c_b najbližja. Ostale meje premaknemo, kot za $g = 5$ kaže slika 20. Srednje vrednosti podintervalov premaknemo skupaj z njihovimi mejami, kar pomeni, da pri krajnih dveh podintervalih ti dve vrednosti nista več srednji.



Slika 20. Poravnanje podintervalov s c_b v našem večvrednostnem modelu minimaksa

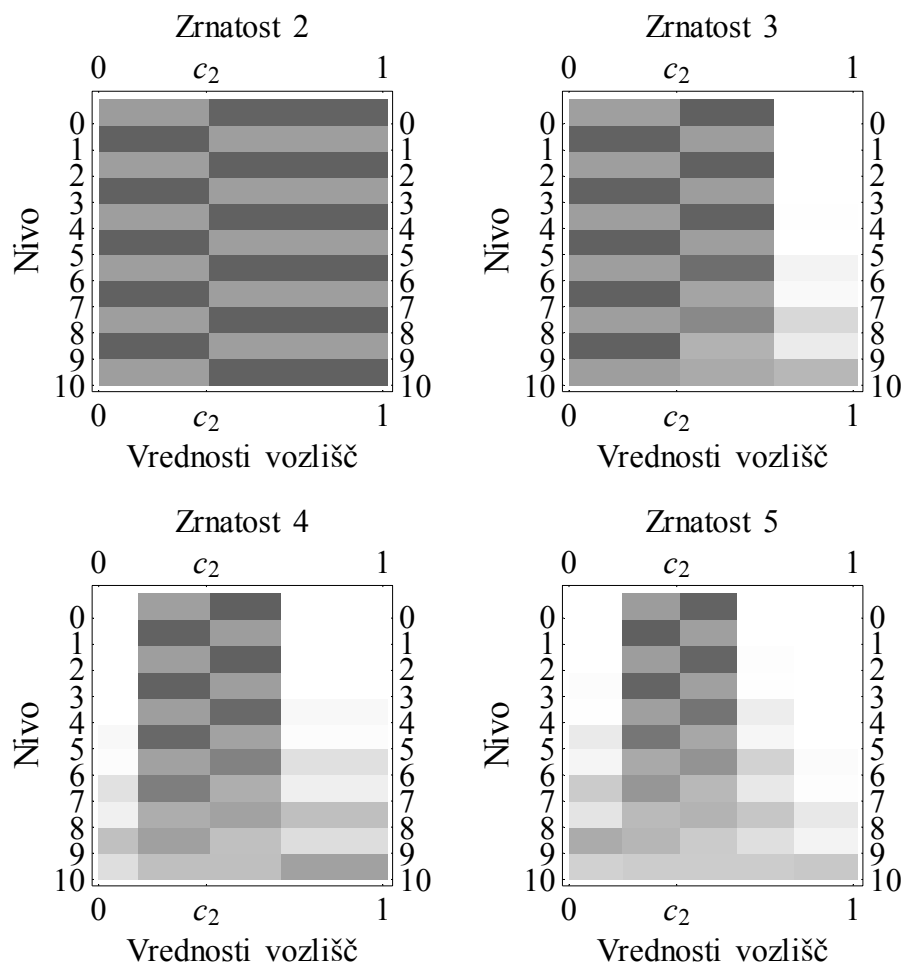
Napaka v večvrednostnem modelu je podobna napaki v realnovrednostnem in jo bomo imenovali VV napaka. VV napaka poteze je definirana enako kot RV in 2V napaka poteze, torej kot verjetnost za napačno potezo. VV napaka položaja pa je definirana enako kot RV napaka položaja, torej kot absolutna razlika med pravo in hevristično vrednostjo. Pri $g = \infty$ sta obe vrsti VV napake enaki RV napaki, pri $g = 2$ pa je VV napaka poteze enaka 2V napaki poteze, medtem ko je 2V napaka položaja definirana drugače.

Da bi raziskali vpliv zrnatosti na patologijo, smo se spet zatekli k simulaciji. Slika 21 kaže 2V napako položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja za različne zrnatosti. Statična VV napaka položaja je konstantna za vsako zrnatost posebej in nastavljena tako, da je 2V napaka položaja pri $d = 0$ enaka 0,1 (v ta namen je σ_e med 0,194 pri $g = 2$ in 0,0157 pri $g = \infty$); $b = 2$ in $d_{\max} = 10$. 2V napako položaja smo izbrali zato, ker je to napaka, ki se je v Bealovem modelu obnašala patološko, in je zato primerna za prikaz prehoda od patološkega dvovrednostnega modela k nepatološkemu realnovrednostnemu.



Slika 21. 2V napaka položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih znatostih

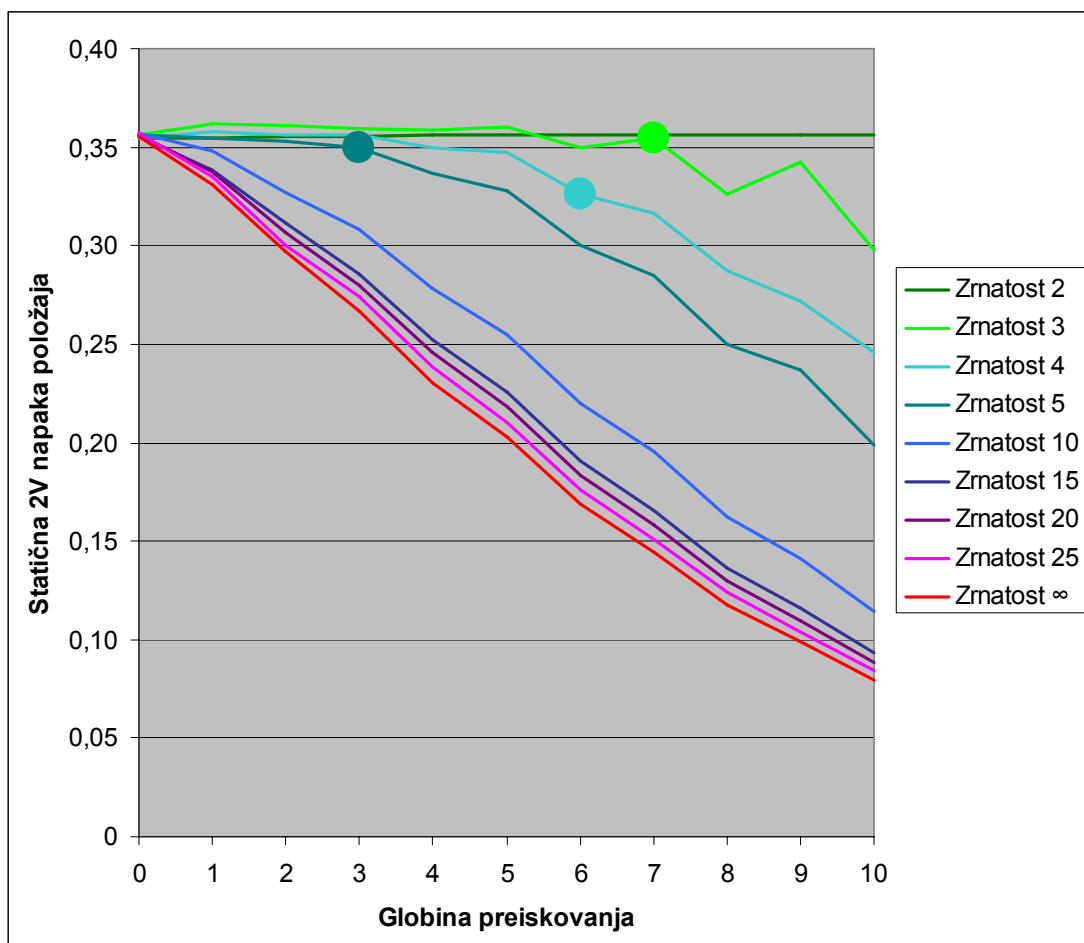
Kot vidimo na sliki 21, patološkost z naraščanjem znatosti pada, dokler med $g = 20$ in $g = 25$ povsem ne izgine. Zgornja krivulja na grafu je enaka krivulji, ki na sliki 14 kaže 2V napako položaja v našem neodvisnem realnovrednostnem modelu. Spodnja krivulja pa je podobna krivulji, ki 2V napako položaja kaže na sliki 8, le da je koristnost minimaksa tu zaradi manjše statične napake ($\sigma_e = 0,0157$, na sliki 8 pa 0,1) manjša. Poudarjene točke so tiste, kjer se pri $g = 3, 4$ in 5 napaka začne obnašati bistveno drugače kot v dvovrednostnem modelu. Da bomo razumeli položaj teh točk in prehod od patološkega dvovrednostnega minimaksa k nepatološkemu realnovrednostnemu nasploh, si oglejmo razporeditev pravih vrednosti vozlišč po drevesu igre. Slika 22 kaže gostoto vrednosti pri $g = 2, 3, 4$ in 5 ; $b = 2$ in $d_{\max} = 10$. Temnejša barva območja pomeni, da je bolj verjetno, da vozlišče zavzame vrednost, ki jo predstavlja tisto območje.



Slika 22. Razporeditev pravih vrednosti vozlišč po drevesu igre pri različnih zrnatostih

Kot vidimo na sliki 22, se vrednosti vozlišč, ki niso sosednje c_b , na višjih nivojih le redko pojavljajo. To ni nepričakovano, saj izmenjujoča se minimum in maksimum izločata velike in majhne vrednosti, dokler ne ostanejo le tiste blizu c_b . Posledica je, da so višji nivoji dreves igre z $g > 2$ podobni drevesom z $g = 2$, torej dvovrednostnim. To se na sliki 22 vidi tudi grafično: zgornji nivoji dreves z $g > 2$ spominjajo na drevo z $g = 2$, le da sta pri njih temna stolpca ožja. Rezultat podobnosti zgornjih nivojev dreves dvovrednostnim je, da je preiskovanje do manjših globin patološko. Da je res tako, potrjujejo poudarjene točke na sliki 21: zaznamujejo namreč najvišji nivo, kjer se vrednosti, ki niso sosednje c_b , pojavljajo z verjetnostjo manjšo od 5 %. Tako ima denimo pri $g = 4$ od nivoja 5 navzgor krajni dve vrednosti manj kot 5 % vozlišč, obenem pa je 5 tista globina, do katere se 2V napaka položaja obnaša zelo podobno kot pri dvovrednostnem minimaksu.

Na sliki 21 smo videli, da naraščajoča zrnatost spremeni obnašanje 2V napake položaja v korenu iz patološkega v nepatološko. Drugo plat tega prehoda pa kaže statična 2V napaka položaja, ki jo v odvisnosti od globine preiskovanja kaže slika 23. Statična VV napaka položaja je spet konstantna za vsako zrnatost posebej in je tokrat nastavljena tako, da je pri $d = 0$ enaka kot na sliki 12 (v ta namen je σ_e med 0,667 pri $g = 2$ in 0,1 pri $g = \infty$); $b = 2$ in $d_{\max} = 10$.



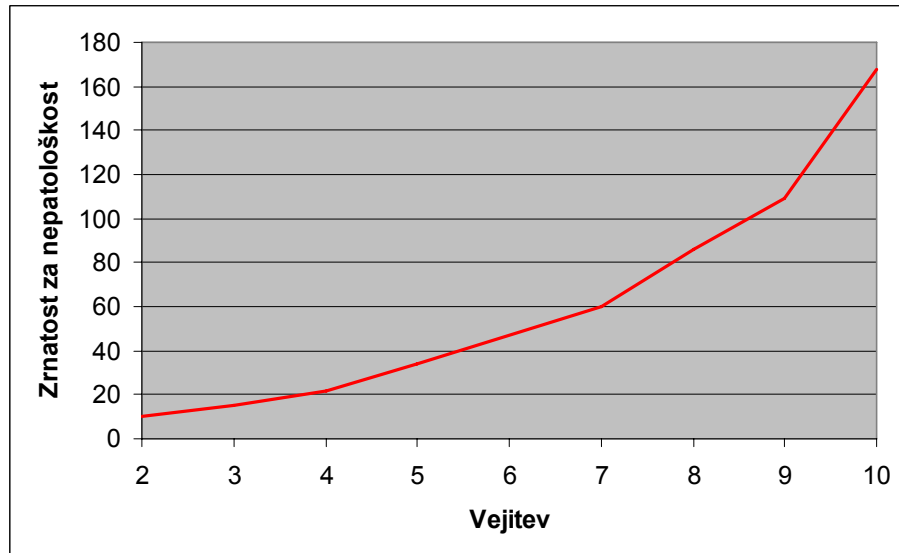
Slika 23. Statična 2V napaka položaja v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih zrnatostih

Na sliki 23 je pri $g = 2$ statična 2V napaka položaja konstantna, kar je posledica konstantne statične VV napake položaja. Če je namreč odstopanje hevristične vrednosti od prave (VV napaka položaja) enako na vseh nivojih, je tudi verjetnost, da to odstopanje povzroči zamenjavo poraza za zmago ali obratno (2V napaka položaja), enaka. Pri $g = \infty$ je statična 2V napaka položaja enaka tisti na sliki 12. Poudarjene točke imajo podoben pomen kot na sliki 21: označujejo globino, kjer se statična 2V napaka položaja bistveno oddalji od tiste pri dvovrednostnem modelu, in obenem najvišji nivo v drevesu igre, kjer se prave vrednosti, ki niso sosednje c_b , pojavljajo z verjetnostjo manjšo od 5 %.

V poizkusih v podpoglavjih 3.1 in 3.2 vejitev ni imela pomembnega vpliva na patologijo. A glede na to, da so nekatere pretekle raziskave [41, 48, 62] pokazale, da velika vejitev utegne povzročiti patologijo, smo preverili njen vpliv še v povezavi z zrnatostjo. V poizkusih smo uporabili vejitve do 10 in ker je simulacija pri velikih vejitvah dolgotrajna, smo višino dreves igre zmanjšali z 10 na 6. V vsakem poizkusu smo tvorili od 1.000 do 10.000 naborov pravih vrednosti in od 5 do 10 naborov hevrističnih vrednosti za vsak nabor pravih. Za presojanje patološkosti smo uporabili povprečni količnik VV napak poteze pri sosednjih globinah preiskovanja, ki je določen z enačbo (28); $MVME_{i,d}$ je VV napaka poteze na i -tem nivoju drevesa po preiskovanju do globine d . Za napako poteze smo se odločili, ker mora biti vsaj ta nepatološka, da je izbira potez z minimaksom smotrna.

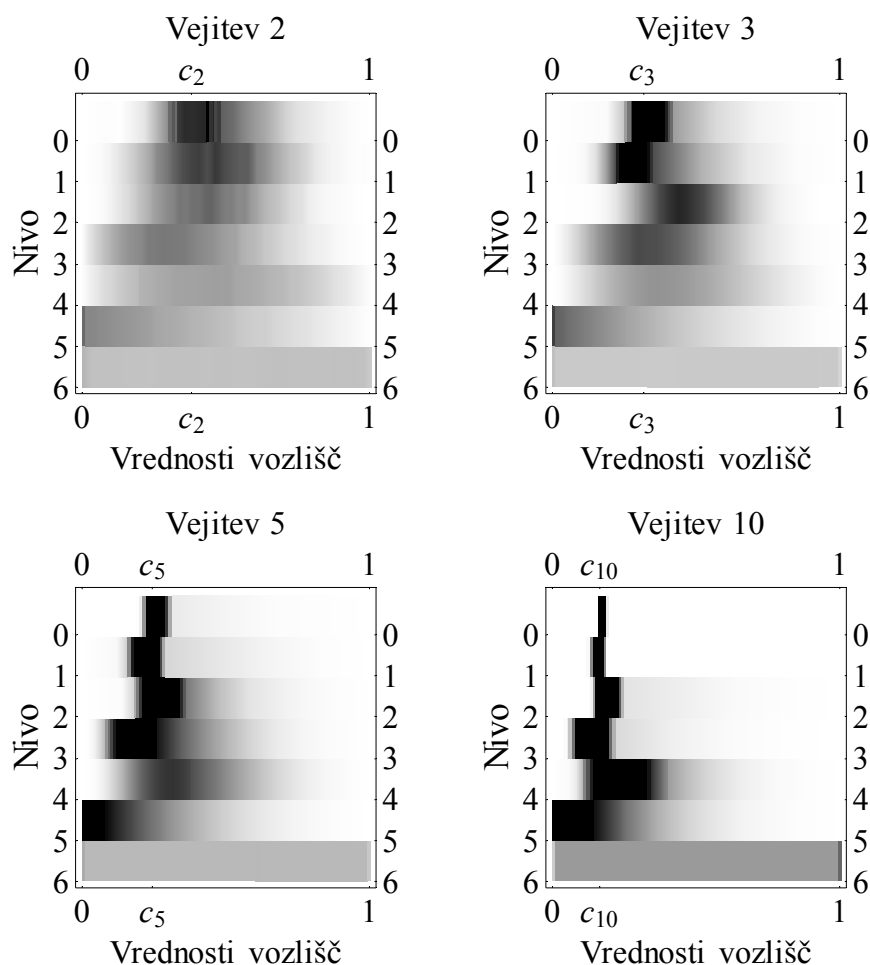
$$pat = \sum_{i=2}^{d_{\max}} \frac{MVME_{0,i}}{MVME_{0,i-1}} \quad (28)$$

Slika 24 kaže zrnatost, ki je potrebna, da se ognemo patologiji, v odvisnosti od vejitve; $d_{\max} = 6$ in $\sigma_e = 0,1$.



Slika 24. Zrnatost, potrebna za nepatološkost, v odvisnosti od vejitve

Kot vidimo na sliki 24, zrnatost, potrebna za nepatološkost, z vejitvijo dokaj hitro raste. Razlog vidimo, če si ogledamo, kako vejitev vpliva na razporeditev pravih vrednosti vozlišč po drevesu igre. Slika 25 kaže gostoto vrednosti v našem realnovrednostnem modelu (tu nas zrnatost ne zanima) pri $b = 2, 3, 5$ in 10 ; $d_{\max} = 6$. Temnejša barva območja spet pomeni, da je bolj verjetno, da vozlišče zavzame vrednost, ki jo predstavlja tisto območje.



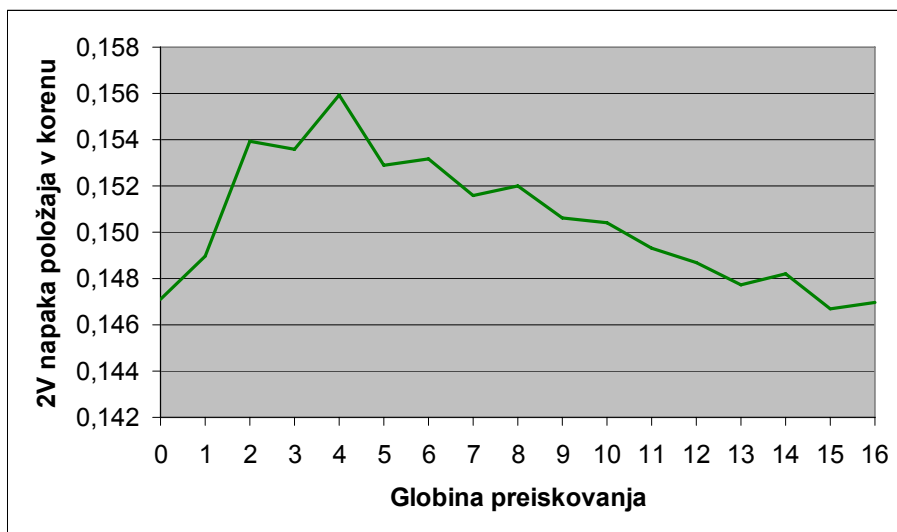
Slika 25. Razporeditev pravih vrednosti vozlišč po drevesu igre pri različnih vejitvah

Kot vidimo na sliki 25, pri večji vejitvi vrednosti vozlišč proti c_b konvergirajo hitreje. To se dogaja, ker izmenjujoča se minimum in maksimum izločata velike in majhne vrednosti. Pri večji vejitvi je ta postopek hitrejši, saj se na vsakem nivoju izloči $(b - 1) / b$ vrednosti. Tako je za to, da v drevesu igre ne ostanejo samo vrednosti zraven c_b , kar drevo glede patologije naredi enakovredno dvovrednostnemu, potrebna večja zrnatost.

Opažanja v tem podpoglavju so povezana z Nauovim delom, opisanim v razdelku 2.1.2. Nau je odkril, da kadar je različnih hevrističnih vrednosti omejeno mnogo, pri dovoljšnji globini preiskovanja in dovoljšnji vejitvi vsi sinovi korena drevesa igre dobijo enako vrednost. To odkritje velja za drevesa, določena s parametroma m in n , in za porazdelitve hevrističnih vrednosti, v katerih nimajo vse vrednosti ničelne verjetnosti. Naša drevesa so nekoliko manj toga od Nauovih, naša porazdelitev pravih vrednosti v večvrednostnem modelu pa zadošča Nauovemu pogoju za hevristične vrednosti. Naše prave vrednosti se vedejo podobno kot Nauove hevristične, glavna razlika je, da mi skrbimo, da vedno ohranimo vsaj dve različni vrednosti, s čimer dosežemo, da je položaj v korenu zanimiv, in omogočimo primerjavo z Bealovim modelom. V našem realnovrednostnem modelu pa prave vrednosti ne zadoščajo Nauovemu pogoju za hevristične vrednosti, saj enakomerno porazdeljena realna spremenljivka vsako vrednost zavzame z verjetnostjo nič, kar je še eno pojasnilo, zakaj ta model ni patološki.

3.4.1. Patološkost in koristnost minimaksa v istem drevesu igre

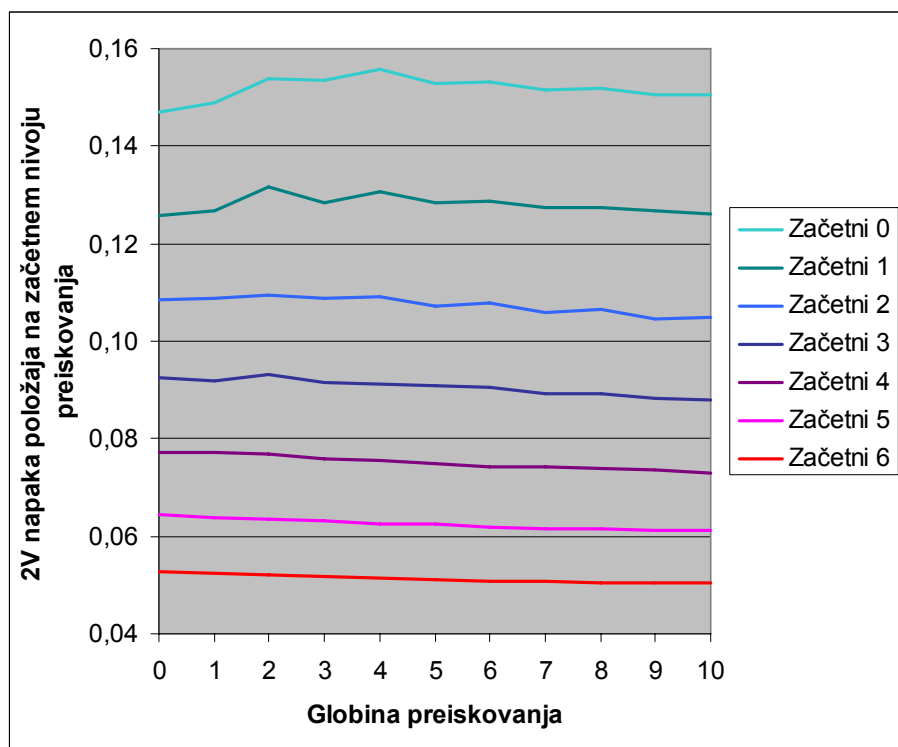
Do zdaj smo razlikovali zgolj med patološkimi in nepatološkimi drevesi igre. Na sliki 21 pa vidimo, da v drevesih obstajajo globine, nad katerimi se 2V napaka položaja vede patološko, pod njimi pa patologija izgine. To kaže, da se v istem drevesu utegne pojaviti območje, kjer je minimaks patološki, in območje, kjer je koristen. V zelo blagi obliki je ta pojav viden že na sliki 21 pri $g = 20$, pričakovati pa je, da bo bolj očiten pri višjih drevesih. Slika 26 kaže 2V napako položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja za drevo z $d_{\max} = 16$ in $g = 52$, kar je zrnatost, pri kateri nastopi iskani pojav; $b = 2$ in $\sigma_e = 0,01$.



Slika 26. 2V napaka položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja v drevesu igre z območjem, kjer je minimaks patološki, in območjem, kjer je koristen

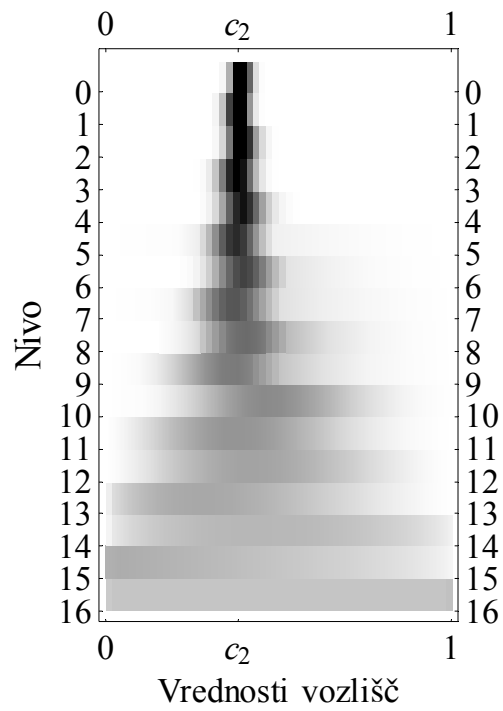
Tako patološkost kot koristnost minimaksa na sliki 26 sta majhni, ker pač opazujemo mejni primer. Vseeno pa je jasno vidno, da so preiskovanja do $d = 4$ patološka, nato pa vsak dodaten nivo napako v korenu zmanjša, dokler pri $d = 15$ ta končno ne pade pod napako pri $d = 0$.

Če bi bilo drevo v prejšnjem poizkusu celo drevo igre, bi med igro preiskovanja začenjali na različnih nivojih. Za prvo potezo bi preiskali nivoje od 0 do $d_{\max}'$, za drugo od 1 do $d_{\max}' + 1$ itd. Če $d_{\max}' = 10$, si pri $d_{\max} = 16$ lahko ogledamo sedem preiskovanj. Slika 27 kaže 2V napako položaja na začetnem nivoju preiskovanja v odvisnosti od globine preiskovanja za vseh sedem začetnih nivojev; $d_{\max}' = 10$, ostali parametri pa so enaki kot pri prejšnjem poizkusu: $b = 2$, $d_{\max} = 16$, $\sigma_e = 0,01$ in $g = 52$.



Slika 27. 2V napaka položaja na začetnem nivoju preiskovanja v odvisnosti od globine preiskovanja za začetne nivoje od 0 do 6 v drevesu igre z območjem, kjer je minimaks patološki, in območjem, kjer je koristen

Na sliki 27 vidimo, da sta preiskovanji, ki se začneta na nivojih 0 in 1, jasno patološki. Pri preiskovanjih, ki se začneta na nivojih 2 in 3, se napaka pri prvih nekaj globinah poveča, nato pa pada. Pri ostalih treh preiskovanjih pa vsak dodaten nivo 2V napako položaja v korenu zmanjša. Slika 28 kaže gostoto pravih vrednosti vozlišč za celotno drevo igre. Kot je pričakovati na podlagi slik 22 in 25, je na spodnjih nivojih dobro zastopan znaten del 52 vrednosti, na zgornjih nivojih pa jih ostane le malo, kar povzroči vedenje, podobno tistemu v dvovrednostnih modelih, torej patološko.



Slika 28. Razporeditev pravih vrednosti vozlišč po drevesu igre z zgornjim območjem, kjer je minimaks patološki, in spodnjim, kjer je koristen

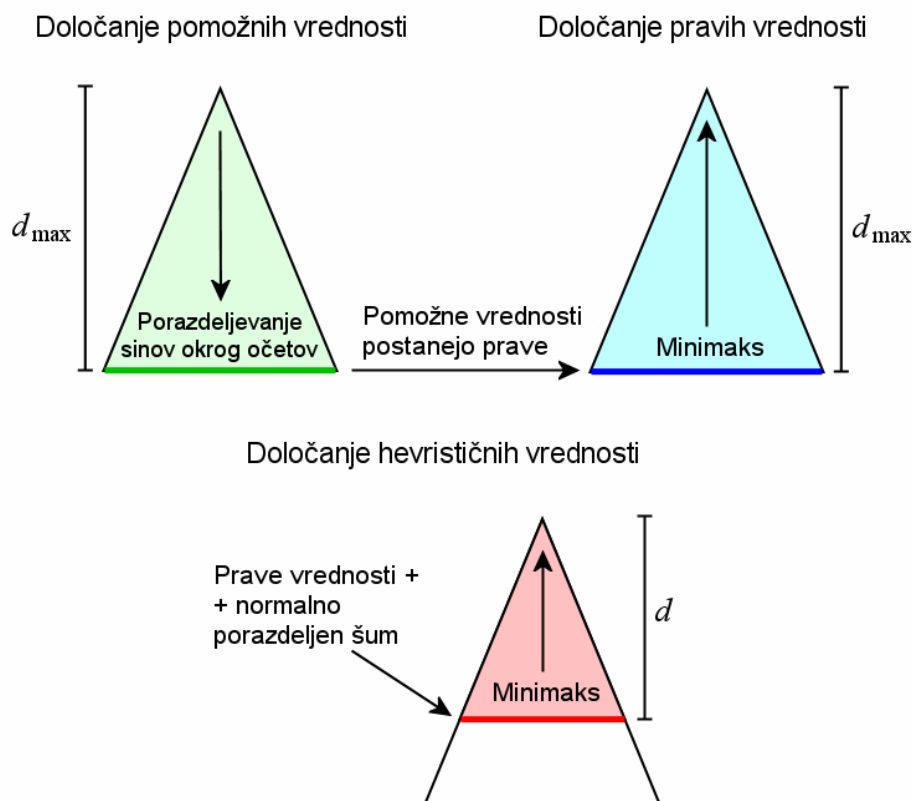
4. Patologija minimaksa z odvisnimi položaji

Ker iz dela drugih raziskovalcev vemo, da odvisnost položajev v igri pomembno vpliva na patologijo, in ker je v večini iger odvisnost brez dvoma navzoča, bomo v tem poglavju preučili patologijo minimaksa v drevesih igre z odvisnimi položaji. Naš model minimaksa bo spet uporabljal realne vrednosti in pokazali bomo, da dokaj realistično posnema šah. Raziskali bomo tudi, kako na patologijo vplivata število možnih vrednosti položaja in stopnja odvisnosti. Večino dognanj tega poglavja smo objavili v [29, 36].

4.1. Odvisni realnovrednostni model minimaksa

Razloge za modeliranje z realnimi vrednostmi smo navedli že pri našem neodvisnem modelu minimaksa v podpoglavju 3.1. V tem poglavju pa se jim bo pridružil še en razlog: realne vrednosti bodo v podpoglavju 4.2 omogočile primerjavo s šahovskim programom Crafty.

Položaji v igri, ki so med seboj oddaljeni le za malo potez, so navadno podobni. To pomeni, da so vrednosti vozlišč, ki so v drevesu igre blizu, tudi podobne, ali z drugimi besedami, da je vrednost vozlišča odvisna od vrednosti bližnjih vozlišč. V *našem odvisnem modelu minimaksa* si prizadevamo, da bi bile vrednosti bratskih vozlišč porazdeljene okrog vrednosti svojega starša. To pomeni, da so si najbolj podobna bratska vozlišča, malo manj so jim podobni njihovi bratranci itd. Drevo gradimo od korena proti listom. Korenu priredimo tako imenovano pomožno vrednost 0, pomožne vrednosti njegovih sinov pa porazdelimo okrog nje. Postopek rekurzivno ponavljamo na sinovih korena, rekurzijo pa ustavimo, ko dosežemo nivo $d_{\max}$. Pomožne vrednosti v listih na nivoju $d_{\max}$ postanejo prave vrednosti, prave vrednosti notranjih vozlišč pa izračunamo z minimaksom iz pravih vrednosti listov. Opozorimo naj, da pomožne vrednosti notranjih vozlišč niso enake njihovim pravih vrednostim, temveč zgolj služijo vzpostavitvi zelenega razmerja med pravih vrednostmi listov. Ko so prave vrednosti vozlišč določene, ravnamo enako kot pri našem neodvisnem modelu. Kadar drevo preiskujemo do globine d , tam določimo statične hevristične vrednosti. Te dobimo tako, da pravih vrednostim prištejemo normalno porazdeljen šum, ki ponazarja statično napako hevristične ocenjevalne funkcije. Hevristične vrednosti na nivojih $< d$ pa spet dobimo z minimaksom iz hevrističnih vrednosti na nivoju d . Postopek je prikazan na sliki 29. Naš odvisni model je podoben postopni Pearlovi igri, s katero se je ukvarjal Nau [45], pa tudi modelom drugih raziskovalcev, ki so preučevali algoritem alfa-beta [19, 25, 49].



Slika 29. Tvorba dreves igre po pravilih našega odvisnega modela minimaksa

Pri našem odvisnem modelu bomo enako kot pri neodvisnem merili RV (in kasneje tudi VV) napako položaja in poteze. Ne bomo pa se ukvarjali z 2V napako, saj smo to potrebovali zgolj za primerjavo našega neodvisnega modela z Bealovim.

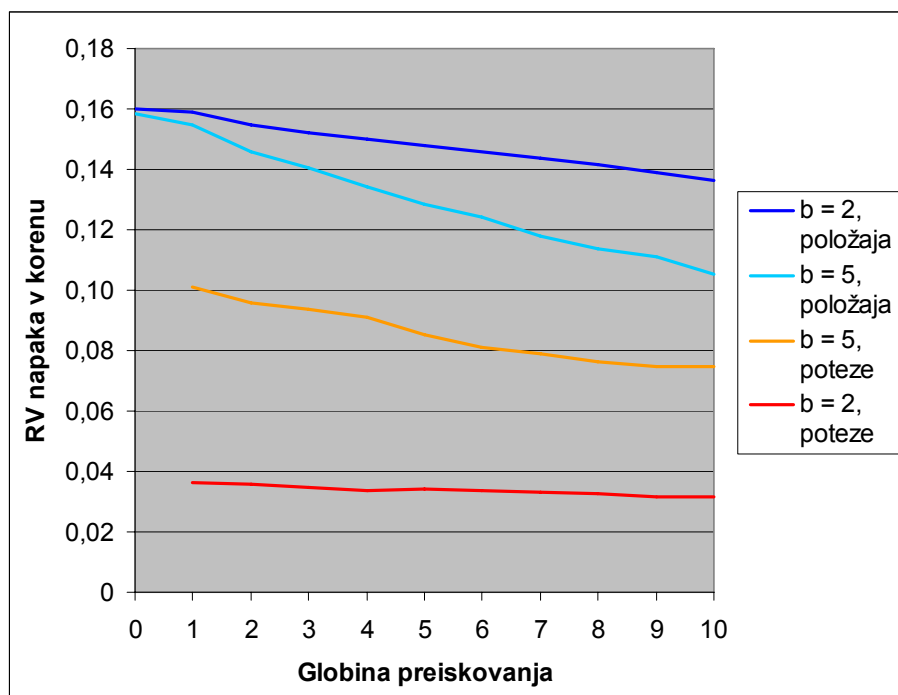
Drevesa igre, tvorjena po pravilih našega odvisnega modela, so določena s šestimi parametri:

- vejitvijo b ,
- največjo globino preiskovanja $d_{\max}$,
- vrsto porazdelitve pomožnih vrednosti bratskih vozlišč okrog pomožne vrednosti svojega starša,
- standardnim odklonom te porazdelitve σ_v ,
- intervalom $[-l, l]$, na katerem ležijo prave vrednosti vozlišč,
- standardnim odklonom normalno porazdeljenega statičnega šuma σ_e .

Kot pri našem neodvisnem modelu smo večinoma uporabljali $b = 2$, saj so bili rezultati pri večjih vejitvah kvalitativno podobni, simulacija pa bistveno dolgotrajnejša. Pri $b = 2$ smo za vsak poizkus tvorili 10.000 naborov pravih vrednosti vozlišč drevesa igre in za vsak nabor pravih vrednosti še 10 naborov hevrističnih vrednosti. Za $d_{\max}$ smo večinoma uporabljali 10, saj večje globine niso prinesle nobenih pomembnih dodatnih informacij, so pa simulacijo znatno podaljšale. Ker je večanje σ_v in l enakovredno manjšanju σ_e in obratno, lahko brez izgube splošnosti σ_v vedno nastavimo na 1 in spreminjamo le ostala dva parametra.

4.1.1. Ugotavljanje patološkosti

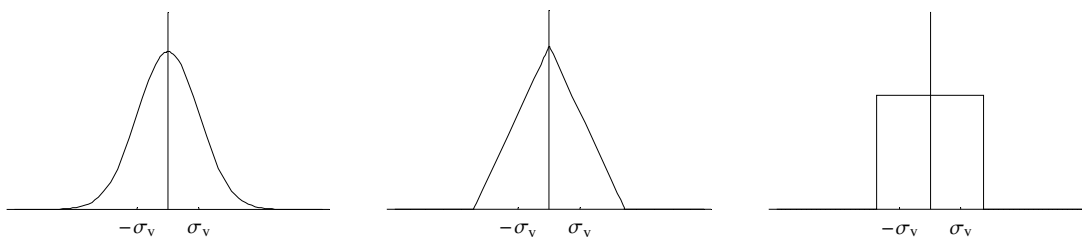
Slika 30 kaže RV napako poteze in položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri $b = 2$ in 5 , $d_{\max} = 10$, normalni porazdelitvi pomožnih vrednosti, $l = \infty$ ter $\sigma_e = 0,2$. Porazdelitev pomožnih vrednosti, l in σ_e se izbrani 'po občutku', zato bomo te tri parametre kasneje vsakega posebej preučili. Pri $b = 5$ smo namesto 10.000 naborov pravih vrednosti tvorili le 2.500.



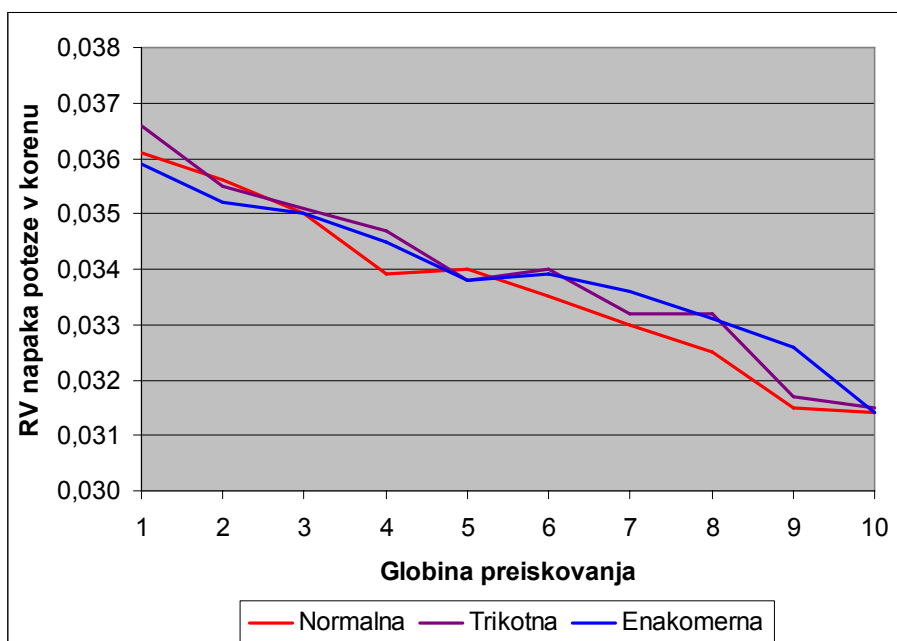
Slika 30. RV napaka poteze in položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri začetni izbiri parametrov

Kot vidimo na sliki 30, nobena napaka ni patološka. Opazimo lahko še dvojje: pri $b = 5$ je RV napaka poteze večja, minimaks pa je glede na obe vrsti napake bolj koristen. Prvi pojav smo opazili že pri našem odvisnem modelu minimaksa v razdelku 3.1.1, kjer smo zapisali, da do njega pride zato, ker je izbrati pravo potezo med petimi težje kot med dvema. Še dodatno ga pojasni slika 25: na njej se namreč vidi, da so si prave vrednosti sinov korena drevesa igre pri večjih vejitvah bolj podobne, izbrati pravega sina med takimi pa je kajpada tudi težje. O večji koristnosti minimaksa pri večjih vejitvah bomo govorili v podpoglavju 5.2.

Oglejmo si zdaj vpliv parametrov našega neodvisnega modela na njegovo patološkost in vedenje nasploh. Slika 32 kaže RV napako poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih **porazdelitvah pomožnih vrednosti**; $b = 2$, ostali parametri pa so enaki kot pri začetni izbiri parametrov: $d_{\max} = 10$, $l = \infty$ in $\sigma_e = 0,2$. Porazdelitve, ki smo jih izbrali, se razlikujejo glede na to, koliko so vrednosti blizu vrednosti starša verjetnejše od bolj oddaljenih, in so prikazane na sliki 31.



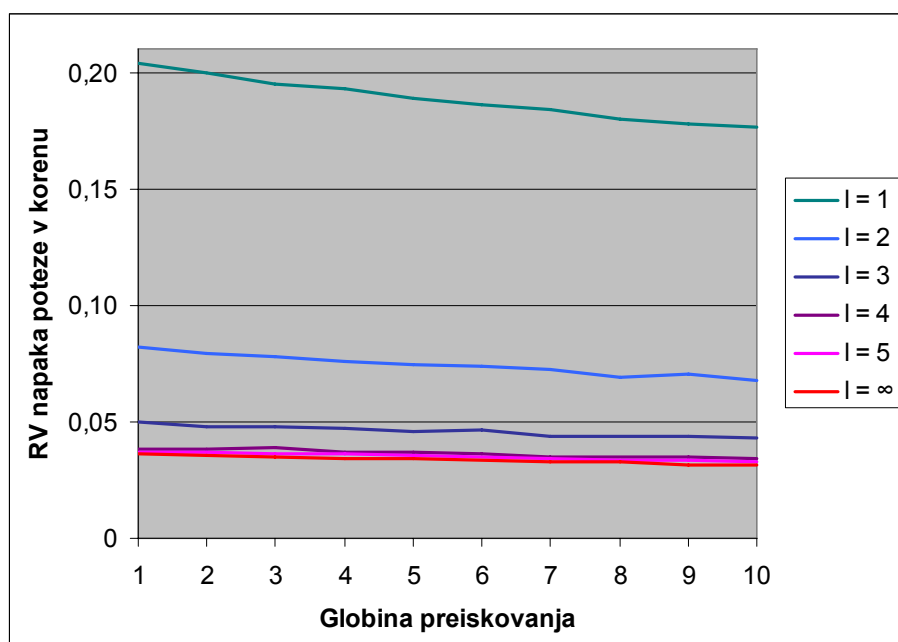
Slika 31. Porazdelitve pomožnih vrednosti bratskih vozlišč okrog pomožne vrednosti svojega starša: normalna, trikotna in enakomerna



Slika 32. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih porazdelitvah pomožnih vrednosti bratskih vozlišč okrog pomožne vrednosti svojega starša

Kot vidimo na sliki 32, vrsta porazdelitve pomožnih vrednosti nima bistvenega vpliva na RV napako poteze. Očitno je pomembno le, da vrednosti bratskih vozlišč okrog vrednosti svojega starša so porazdeljene, ne pa, kako točno so porazdeljene. Razlike med krivuljami na grafu so verjetno zgolj posledica naključnosti tvorbe dreves igre.

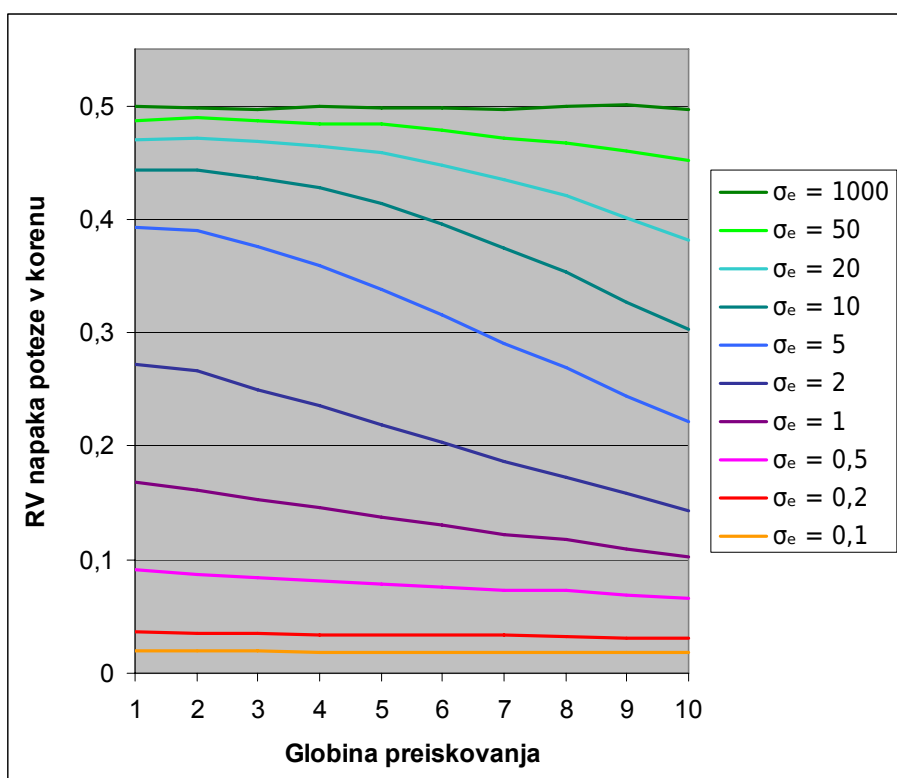
Začetna izbira $l = \infty$ ob normalni porazdelitvi pomožnih vrednosti pomeni, da imajo listi načeloma lahko poljubno velike in majhne vrednosti. V igrah so vrednosti položajev navadno omejene: denimo v šahu slabšega (ali boljšega – odvisno od gledišča) položaja od mata ni. V našem odvisnem modelu to dosežemo tako, da vrednosti, ki bi ležale zunaj intervala $[-l, l]$, prestavimo v $-l$ ali l . Slika 33 kaže RV napako poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različno širokih **intervalih, na katerih ležijo prave vrednosti vozlišč**; $b = 2$, ostali parametri pa so enaki kot pri začetni izbiri parametrov: $d_{\max} = 10$, porazdelitev pomožnih vrednosti je normalna (razen kolikor nanjo vplivata meji $-l$ in l) in $\sigma_e = 0,2$.



Slika 33. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različno širokih intervalih, na katerih ležijo prave vrednosti vozlišč

Kot vidimo na sliki 33, se patologija ne pojavi ne glede na vrednost l . Tudi na to, koliko koristno je globlje preiskovanje, ne vpliva dosti, čeprav na sliki to morda ni očitno: pri $l = \infty$ je RV napaka poteze pri $d = 10$ v primerjavi z $d = 1$ manjša za 13,0 %, pri $l = 1$ pa za 13,4 %. Vpliva pa l na velikost napake: pri manjših l je napaka večja, ker so prave vrednosti bolj omejene in so si zato med seboj bolj podobne, med takimi pa je težje izbrati pravo. Sklepamo lahko tudi, da se v drevesih igre ne pojavlja veliko zelo velikih ali zelo majhnih vrednosti, saj je napaka pri $l = 4$ že skoraj enaka tisti pri $l = \infty$.

Za konec preizkusimo še **standardni odklon statičnega šuma**. Glede na izkušnje z našim neodvisnim modelom iz razdelka 3.1.1 je ta parameter glavni kandidat za povzročitev patologije. Slika 34 kaže RV napako poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih standardnih odklonih statičnega šuma; $b = 2$, ostali parametri pa so enaki kot pri začetni izbiri parametrov: $d_{\max} = 10$, porazdelitev pomožnih vrednosti je normalna in $l = \infty$.



Slika 34. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih standardnih odklonih statičnega šuma

Kot vidimo na sliki 34, v našem odvisnem modelu večji šum ne povzroči patologije. Vseeno pa vpliva na to, koliko je globlje preiskovanje koristno: pri majhnem šumu je koristnost majhna, kar lahko intuitivno razložimo s tem, da pri majhni napaki tudi prostora za izboljšavo ni veliko (z boljšo razlago bomo postregli v podpoglavju 5.2), nato se zveča, pri $\sigma_e = 1000$ pa prave vrednosti položajev povsem utonejo v šumu in odločitve postanejo naključne.

Iz poizkusov z našim odvisnim modelom minimaksa lahko sklepamo, da je na patologijo precej odporen – bolj kot naš neodvisni model. Je pa res, da to ni nepričakovano, saj so že v preteklosti mnogi raziskovalci ugotovili, da odvisnost vrednosti bližnjih vozlišč patologijo prepreči.

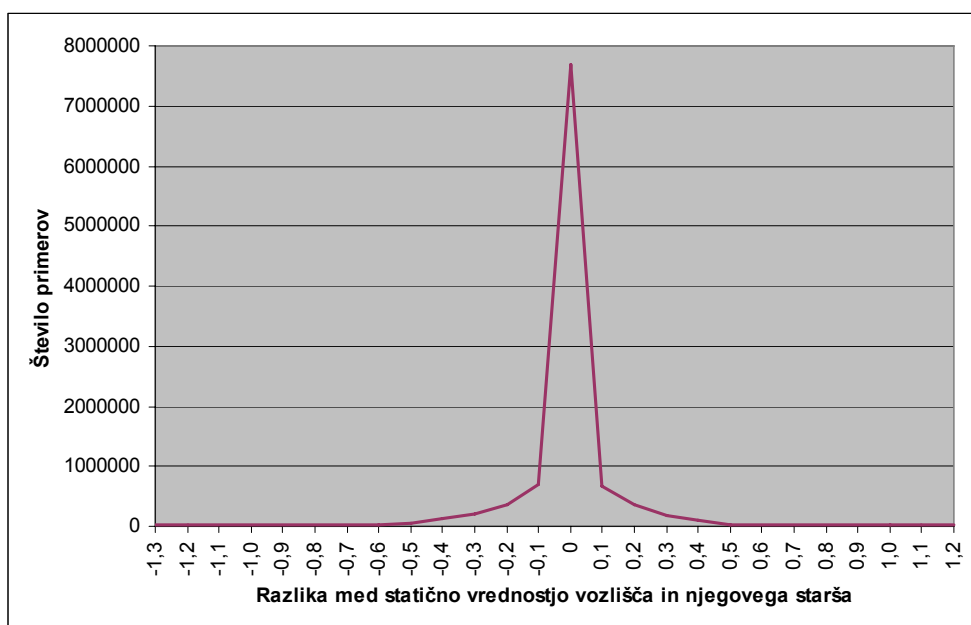
4.2. Primerjava s šahovskim programom

Ena od težav preteklega dela na področju patologije je pomanjkanje primerjav z igrami. Glavni razlog najbrž je, da je treba za točno merjenje napake poznati prave vrednosti položajev ali vsaj prave poteze, tega pa za kompleksne igre, kakršen je denimo šah, v glavnem ne poznamo. Včasih se zato namesto pravih vrednosti uporabijo hevristične vrednosti dobrega programa za igranje igre [22], kajti če za program vemo, da je v primerjavi z ljudmi in drugimi programi dober, lahko domnevamo, da pogosto vleče prave poteze, za to pa morajo biti tudi njegove hevristične vrednosti blizu pravim. Ob tem velja spomniti na podpoglavje 3.1, kjer prave vrednosti definiramo kot take, s pomočjo katerih igralec igra najboljše možno. Tudi mi smo naš odvisni model minimaksa primerjali z igro s pomočjo programa: izbrali smo šahovski program Crafty [21]. Za Crafty smo se odločili, ker je bil v času izbire z ELO 2,616 najboljši

odprtokodni šahovski program na lestvici SSDF [24] – odprtokodnost smo potrebovali, ker so naši poizkusi zahtevali posege v kodo.

Primerjava med našim odvisnim modelom in Craftyjem bi morala temeljiti na vrednosti listov drevesa igre. Vendar je to težavno, ker je pri šahu preiskovanje celega drevesa igre, ki bi pokazalo pravo porazdelitev vrednosti listov, zaradi velikosti drevesa časovno prezahtevno. Poleg tega v Craftyju ni enostavno izključiti raznih izboljšav minimaksa, ki povzročijo, da se preiščejo le nekateri deli drevesa, in konec koncev se je morda celo smotno osredotočiti na tiste dele drevesa, ki jih Crafty dejansko preišče. Zaradi tega smo za primerjavo uporabili razmerje med statičnimi hevrističnimi vrednosti vozlišč in njihovih sinov v Craftyju ter pomožnimi vrednostmi vozlišč in njihovih sinov v našem modelu. Vrednosti listov so namreč v obeh primerih določene s tem razmerjem: tako v Craftyju kot v našem modelu statične/pomožne vrednosti na najnižjem nivoju preiskovanja postanejo prave (v Craftyju ne zares prave, a jih štejemo za take, ker točnejših nimamo).

Za primerjavo Craftyja z našim odvisnim modelom smo uporabili desetino od $4,5 \cdot 10^6$ položajev, ki jih je Crafty obiskal med igro proti GNU Chessu [26]. Upoštevali smo vse položaje, na katere je program naletel med preiskovanjem, ne le tiste, v katerih se je med igro dejansko znašel. Za vsak položaj smo izračunali razliko med njegovo statično vrednostjo in statično vrednostjo njegovega starša. Iskanja mirnih položajev pri tem nismo uporabljali. Izračunane vrednosti smo uvrstili v intervale širine 0,1 in število vrednosti v vsakem intervalu prešteli. Slika 35 kaže število primerov, v katerih vrednost leži v nekem intervalu; zgornji in spodnji 1 % vrednosti smo izpustili, ker bi se sicer zanimivi del slabo videl, saj sta bili skrajni vrednosti $-5,79$ in $8,66$.

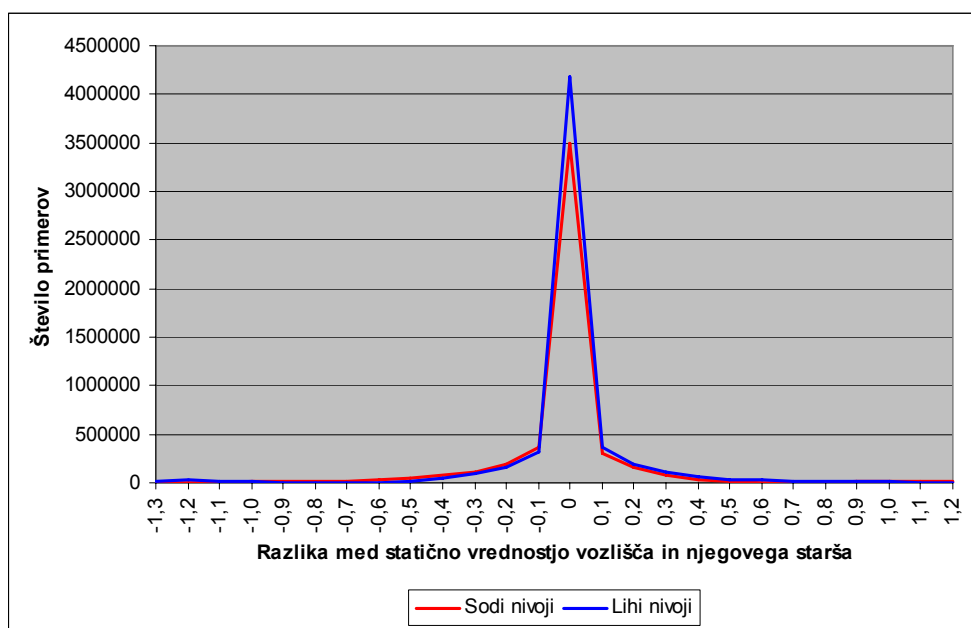


Slika 35. Porazdelitev razlik med statičnimi vrednostmi vozlišč in njihovih staršev v Craftyju

Kot vidimo na sliki 35, so statične vrednosti vozlišč povečini blizu statičnih vrednosti njihovih staršev, porazdelitev razlik statičnih vrednosti pa je podobna normalni. Razmerje statičnih vrednosti v Craftyju je tako podobno razmerju pomožnih vrednosti v našem odvisnem modelu. Glede na to, da je poizkus z različnimi porazdelitvami

pomožnih vrednosti na sliki 32 pokazal, da vrsta porazdelitve na RV napako poteze v korenu ne vpliva bistveno, lahko rezultate, pridobljene s Craftyjem, štejemo za potrditev, da naš model zadovoljivo posnema prave igre.

Kot zanimivost si oglejmo še, kako se razlikujeta porazdelitvi razlik med statičnimi vrednostmi vozlišč in njihovih staršev na sodih in na lihih nivojih. Preprosta hevristična ocenjevalna funkcija, ki bi upoštevala samo, katere figure imata igralca, bi namreč na lihih nivojih vedno vračala vrednosti, večje od vrednosti starša ali njej enake, saj se število figur po potezi prvega igralca lahko spremeni kvečjemu njemu v prid. Na sodih nivojih pa bi vračala vrednosti, manjše od vrednosti starša ali njej enake, saj se število figur po potezi drugega igralca lahko spremeni kvečjemu prvemu v škodo. Slika 36 kaže ločeni porazdelitvi na sodih in na lihih nivojih. Res je na lihih nivojih pozitivnih vrednosti nekoliko več, a očitno Crafty upošteva še precej drugih dejavnikov, saj sta porazdelitvi zelo podobni skupni na sliki 35.



Slika 36. Porazdelitvi razlik med statičnimi vrednostmi vozlišč in njihovih staršev v Craftyju na sodih in na lihih nivojih

4.3. Zrnatost in stopnja odvisnosti modela

Pri našem neodvisnem modelu minimaksa smo v podpoglavju 3.4 preučili, kaj se zgodi, če realne vrednosti položajev nadomestimo s končnim številom diskretnih vrednosti. Izkazalo se je, da premajhna zrnatost povzroči patologijo in kot se vidi na sliki 24, da na patološkost vpliva tudi vejitev: pri večji vejitvi je za izognitev patologiji potrebna večja zrnatost. Vpliv zrnatosti na patologijo bi si radi ogledali tudi pri našem odvisnem modelu, zato ga bomo podobno kot neodvisnega spremenili iz realnovrednostnega v večvrednostnega. Da bomo modela lahko primerjali, pa moramo najprej rešiti dve težavi.

Prva težava je, da smo pri modelih, s katerimi smo se ukvarjali do zdaj, uporabljali različne razpone vrednosti vozlišč in njim prilagojene standardne odklone statičnega šuma. Pri neodvisnem modelu so bile vrednosti vozlišč na intervalu $[0, 1]$, pri odvisnem modelu pa pri normalni porazdelitvi pomožnih vrednosti bratskih vozlišč okrog

pomožne vrednosti svojega starša sploh niso bile omejene. Sicer jih lahko omejimo s parametrom l , vendar ima ista vrednost l pri različnih vejitvah različen vpliv, tako da je tovrstno omejevanje za primerjavo vejitev nekoliko nerodno. Namesto tega bomo v poizkusih v tem podpoglavju pri vsakem odvisnem drevesu igre 1 % najmanjših in 1 % največjih vrednosti vozlišč predstavili v najmanjšo ali največjo med ostalimi 98 % vrednosti. Nato bomo vse vrednosti linearno preslikali na interval $[0, 1]$.

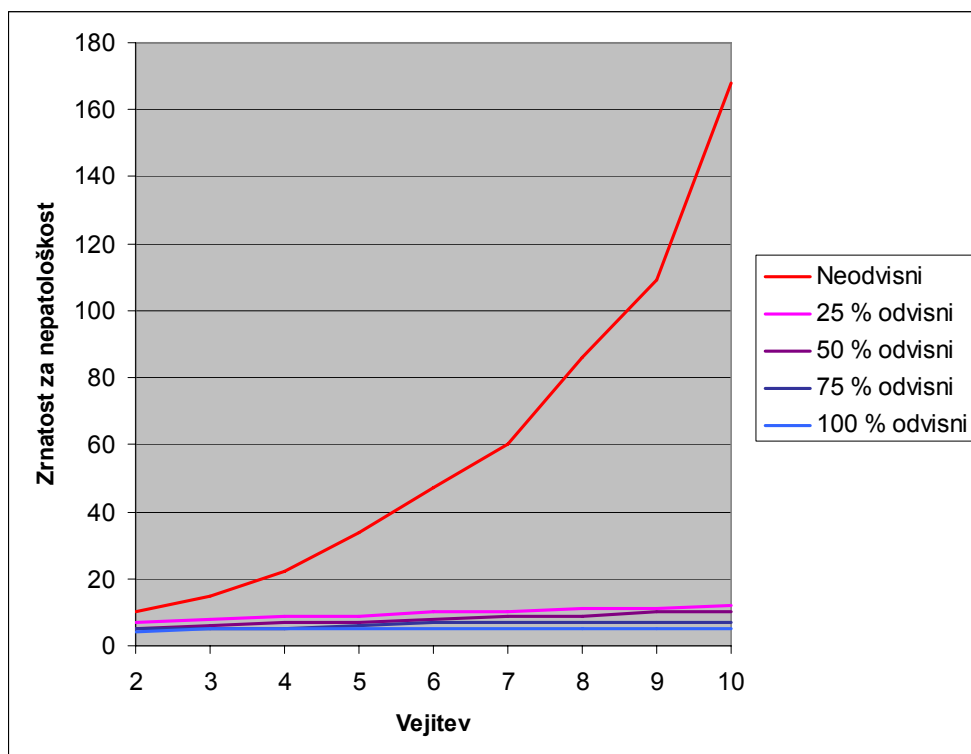
Druga težava je, kako pri našem odvisnem modelu interval $[0, 1]$ razdeliti na g podintervalov. Pri našem neodvisnem modelu smo uporabili premik meje med podintervali v c_b , pri odvisnem pa c_b nima nikakršnega pomena. Namesto tega mejo premaknemo v točko c_b' , ki jo definiramo kot število, od katerega je prava vrednost korena drevesa igre z verjetnostjo c_b manjša in z verjetnostjo $1 - c_b$ večja. Vrednost c_b' je nekakšna posplošitev c_b na poljuben model in je v našem neodvisnem modelu enaka c_b . V odvisnih modelih sicer nima takega pomena, kot ga ima v neodvisnem, še vedno pa zagotavlja, da položaj v korenu ni zelo močno v prid enemu igralcu, in doseže, da so modeli primerljivi. Za izračun točke c_b' smo naključno tvorili x dreves igre, pri čemer je bilo število x odvisno od vejitve in nikoli ni bilo manjše od 1,000. Prave vrednosti korenov teh dreves smo uredili po velikosti od najmanjše do največje in za c_b' izbrali $c_b x$ -to po vrsti.

Opisani postopek, ki vrednosti vozlišč poljubnega modela preslika na interval $[0, 1]$ in določi razdelitev tega intervala na podintervale, nam poleg primerjave našega neodvisnega in odvisnega modela omogoča tudi kombiniranje modelov. Tvorimo lahko odvisno drevo igre, ki mu nato delež listov zamenjamo z enakomerno porazdeljenimi naključnimi vrednostmi z intervala $[0, 1]$. Na ta način spreminjamo stopnjo odvisnosti, česar naš odvisni model sicer ne omogoča.

Naš neodvisni model smo tako s simulacijo primerjali s 25-, 50-, 75- in 100-odstotno odvisnim. Enako kot v poizkusih na sliki 24 smo uporabili drevesa igre višine 6, od 1.000 do 10.000 naborov pravih vrednosti in od 5 do 10 naborov hevrističnih vrednosti za vsak nabor pravih. Patološkost smo spet presojali s količnikom *pat*, določenim z enačbo (28). Razpredelnica 2 in slika 37 kažeta zrnatost, ki je potrebna, da se ognemo patologiji, v odvisnosti od vejitve pri različnih stopnjah odvisnosti modela; $d_{\max} = 6$ in $\sigma_e = 0,1$, odvisna drevesa igre pa imajo normalno porazdelitev pomožnih vrednosti bratskih vozlišč okrog pomožne vrednosti svojega starša in $l = \infty$.

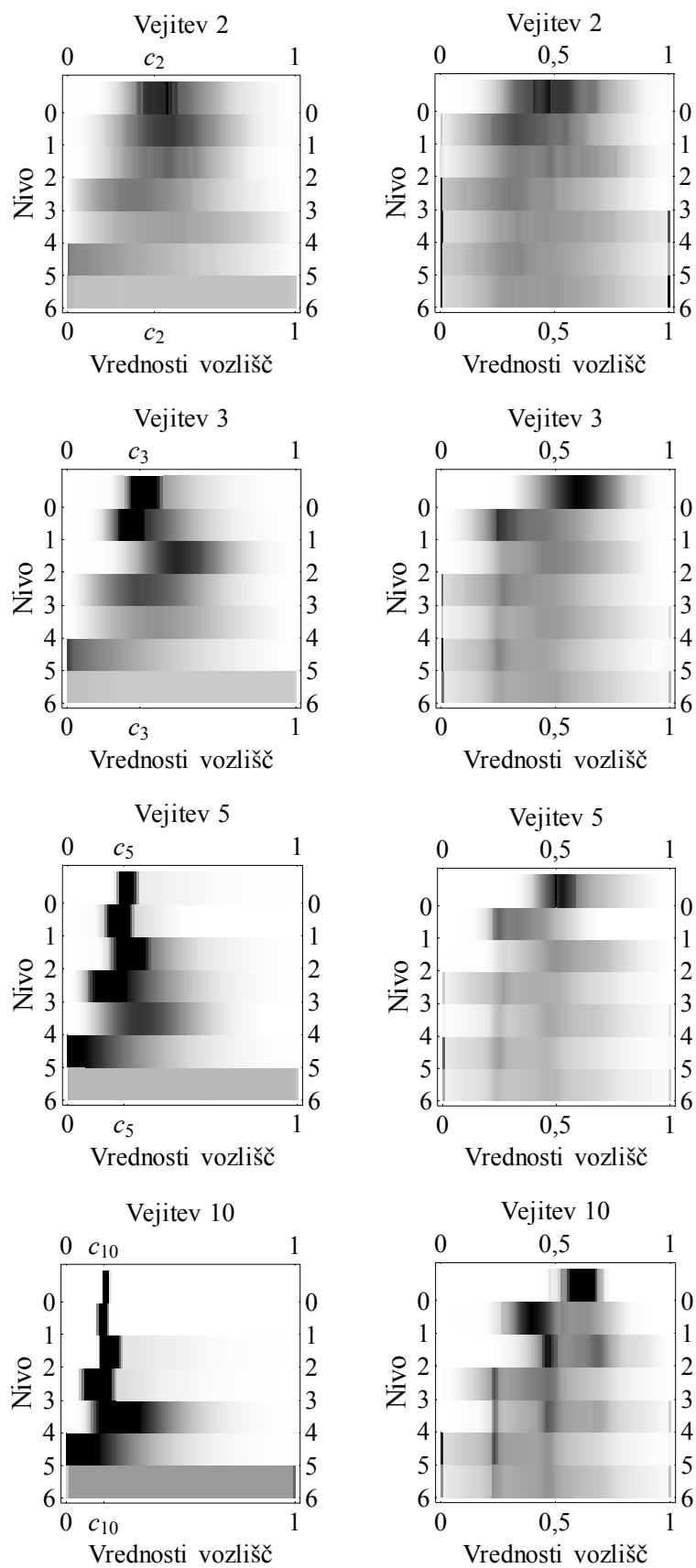
b	Neodvisni	25 % odvisni	50 % odvisni	75 % odvisni	100 % odvisni
2	10	7	5	5	4
3	15	8	6	5	5
4	22	9	7	5	5
5	34	9	7	6	5
6	47	10	8	7	5
7	60	10	9	7	5
8	86	11	9	7	5
9	109	11	10	7	5
10	168	12	10	7	5

Razpredelnica 2. Zrnatost, potrebna za nepatološkost, v odvisnosti od vejitve pri različnih stopnjah odvisnosti modela minimaksa



Slika 37. Zrnatost, potrebna za nepatološkost, v odvisnosti od vejitve pri različnih stopnjah odvisnosti modela minimaksa

Kot vidimo v razpredelnici 2 in na sliki 37, pri našem neodvisnem modelu minimaksa zrnatost, potrebna za nepatološkost, z vejitvijo dokaj hitro raste, pri (delno) odvisnih modelih pa patologija nastopi le pri majhnih zrnatostih. Pri delni odvisnosti mejna zrnatost z vejitvijo vseeno nekoliko raste, pri povsem odvisnem modelu pa od $b = 3$ naprej ne. Krivulja neodvisnega modela je enaka tisti na sliki 24, kjer smo jo tudi pojasnili: pri večjih vejitvah se razpon vrednosti vozlišč na zgornjih nivojih drevesa igre tako skrči, da je model podoben dvovrednostnemu, za katerega se ve, da je patološki. Iz slike 37 lahko sklepamo, da se pri odvisnem modelu to krčenje ne zgodi, česar ni težko pojasniti. Drevesa so namreč zgrajena tako, da pomožne vrednosti na nivoju 1 v povprečju niso zelo blizu ena drugi. In ker so vsa poddrevesa s koreni na nivoju 1 zgrajena na povsem enak način, le pomožne vrednosti njihovih korenov so različne, so tudi prave in hevristične vrednosti na nivoju 1 v povprečju ena od druge oddaljene enako kot pomožne. Ali se razpon vrednosti vozlišč na zgornjih nivojih drevesa v našem odvisnem modelu minimaksa res ne skrči tako kot v neodvisnem, bomo preverili na sliki 38, ki kaže razporeditev pravih vrednosti vozlišč po drevesu igre. V levem stolpcu vidimo gostoto vrednosti v neodvisnem modelu (grafi tega stolpca so enaki grafom na sliki 25) pri $b = 2, 3, 5$ in 10 , v desnem pa v odvisnem; $d_{\max} = 6$. Temnejša barva območja pomeni, da je bolj verjetno, da vozlišče zavzame vrednost, ki jo predstavlja tisto območje.



Slika 38. Razporeditev pravih vrednosti vozlišč po drevesu igre pri različnih vejitvah v našem neodvisnem (levo) in odvisnem (desno) modelu minimaksa

Kot vidimo na sliki 38, se – po pričakovanju – na zgornjih nivojih našega odvisnega modela minimaksa ohranja širši razpon vrednosti vozlišč kot na zgornjih nivojih neodvisnega. Se pa tudi v odvisnem modelu z večanjem vejitve razpon krči. Tako krčenje je pričakovano, saj izmenjujoča se minimum in maksimum enako kot v neodvisnem modelu izločata velike in majhne vrednosti, ni pa povsem jasno, zakaj ne vpliva na zrnatost, ki je potrebna, da se ognemo patologiji. Najverjetnejša razlaga se zdi, da krčenje uravnoteži večja koristnost preiskovanja z minimaksom pri večjih vejitvah, ki smo jo opazili že na sliki 30 in se ji bomo posvetili v podpoglavju 5.2. Na grafih našega odvisnega modela je opaziti nekaj navpičnih prog. Robne proge verjetno povzročata 1 % najmanjših in 1 % največjih vrednosti, ki jih prestavimo v 0 in 1, ostalih pa ne znamo pojasniti.

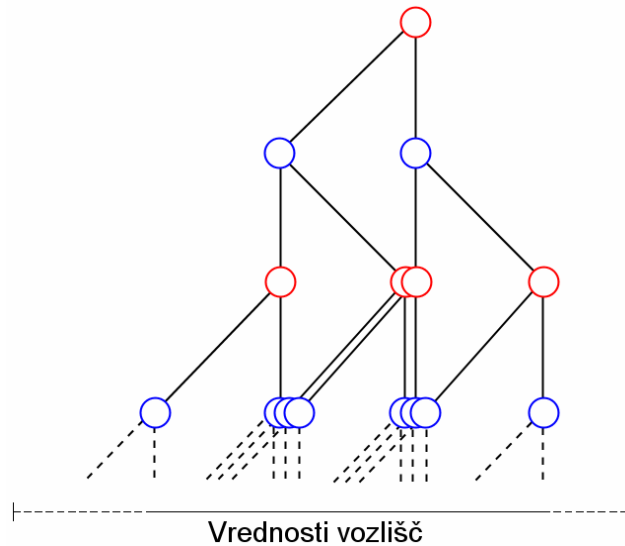
Še en nenavaden pojav na sliki 38 je, da se celo zgolj 25-odstotno odvisni model glede zrnatosti in patološkosti vede skoraj enako kot 100-odstotno odvisni. Pojasnila žal nimamo. Je pa to, da že majhna stopnja odvisnosti prepreči patologijo, znak, da patologije res ni pričakovati v igrah. Kljub uspešni primerjavi našega povsem odvisnega modela minimaksa s šahovskim programom v prejšnjem podpoglavju je namreč povsem možno, da je v nekaterih igrah odvisnost manjša. Pearl [51] je denimo za postopno Pearlovo igro, ki je podobna našemu odvisnemu modelu, trdil, da je odvisnost v njej nerealistično močna. In če bi v igrah lahko pričakovali obnašanje, podobno obnašanju našega neodvisnega modela, bi lahko pričakovali tudi patologijo. V šahu denimo se vejitev giblje med 30 in 40 in če bi zrnatost, ki je potrebna, da se ognemo patologiji, pri $b > 10$ naraščala tako hitro, kot na sliki 37 narašča pri manjših vejitvah, bi tudi nekaj tisoč vrednosti, kolikor jih poznajo hevristične ocenjevalne funkcije šahovskih programov, lahko bilo premalo.

5. Zakaj je minimaks koristen

Do zdaj smo se ukvarjali predvsem s patologijo minimaksa in razlogi zanjo. A ker smo ugotovili, da patologija ni tako razširjena, kot so kazale prve raziskave s tega področja, se velja vrniti k vprašanju, s katerim je denimo Beal [6] do odkritja patologije sploh prišel: zakaj minimaks deluje. To bomo razložili na zelo enostavnem modelu, potem pa si bomo ogledali, kaj se s koristnostjo preiskovanja z minimaksom zgodi, če model nekoliko posplošimo.

5.1. Razlaga na enostavnem modelu

Enostavni model minimaksa, ki ga bomo uporabili za razlago koristnosti minimaksa, ima vejitev 2, pravi vrednosti bratskih vozlišč pa se povsod razlikujeta za 1. Prikazan je na sliki 39. Napako hevristične ocenjevalne funkcije bomo zopet ponazorili z normalno porazdeljenim šumom, ki bo zaradi večje nazornosti precej velik: $\sigma_e = 1$.



Slika 39. Enostavni model minimaksa

Vozlišče na nivoju $i - 1$ enostavnega modela minimaksa ima dva sinova, katerih hevristični vrednosti sta slučajni spremenljivki L_i (manjša) in H_i (večja) s srednjima vrednostma μ_{L_i} in μ_{H_i} . Statične hevristične vrednosti so porazdeljene normalno: srednji hevristični vrednosti bratskih vozlišč sta μ_{L_d} in μ_{H_d} (obenem sta to tudi pravi vrednosti teh vozlišč), njun standardni odklon pa je σ_e . Gostota njunih porazdelitev je podana z enačbama (29).

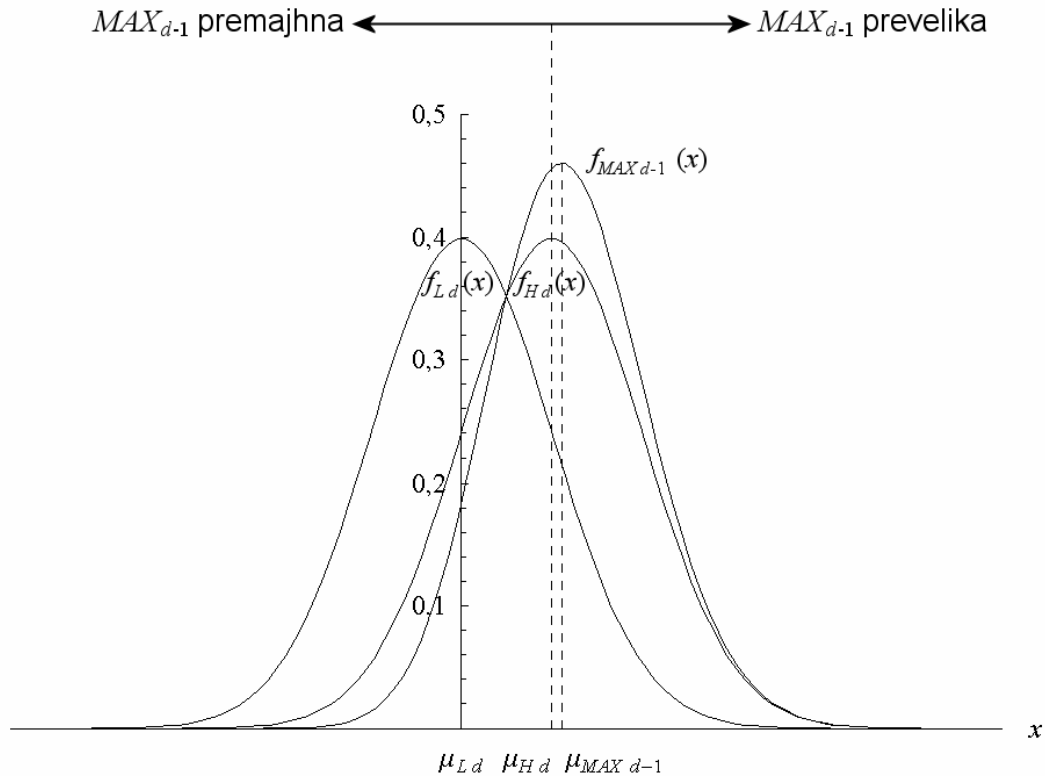
$$f_{L_d}(x) = \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu_{L_d})^2}{2\sigma_e^2}} \quad (29)$$

$$f_{H_d}(x) = \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu_{H_d})^2}{2\sigma_e^2}}$$

Če je nivo $i - 1$ vrste maks, je vrednost vozlišča na njem slučajna spremenljivka $MAX_{i-1} = \max(L_i, H_i)$, gostota njene porazdelitve pa se izračuna z enačbo (30).

$$\begin{aligned}
f_{MAX_{i-1}}(x) &= f_{H_i}(x)P(L_i < x) + f_{L_i}(x)P(H_i < x) = \\
&= f_{H_i}(x) \int_{-\infty}^x f_{L_i}(l)dl + f_{L_i}(x) \int_{-\infty}^x f_{H_i}(h)dh
\end{aligned} \tag{30}$$

Gostote porazdelitev L_d , H_d in MAX_{d-1} kaže slika 40. Spremenljivka MAX_{d-1} v nasprotju z L_d in H_d ni porazdeljena normalno, čeprav to na prvi pogled ni očitno. Njeno porazdelitev smo dobili z numerično integracijo.



Slika 40. Gostote porazdelitev statičnih hevrističnih vrednosti bratskih vozlišč in hevristične vrednosti njunega starša

Kot vidimo na sliki 40, je vzpetina krivulje starša ($f_{MAX_{d-1}}$) ožja od vzpetin krivulj njegovih sinov (f_{L_d} in f_{H_d}), kar pomeni, da je varianca hevristične vrednosti starša manjša. Ker je v enostavnem modelu razlika med pravimi vrednostmi bratskih vozlišč konstantna, je konstantna tudi razlika med njihovimi srednjimi hevrističnimi vrednostmi. Zaradi tega na RV napako poteze – verjetnost, da je hevristična vrednost vozlišča z manjšo pravo vrednostjo večja od hevristične vrednosti njegovega brata – vpliva le varianca: pri manjši varianci je napaka kajpada manjša. Če bi bila srednja vrednost starša enaka srednji vrednosti večjega sina, bi manjša varianca pri staršu pomenila tudi manjšo RV napako položaja. A ker je srednja vrednost starša nekoliko večja, to ne drži nujno, tako da si bomo napako položaja ogledali kasneje.

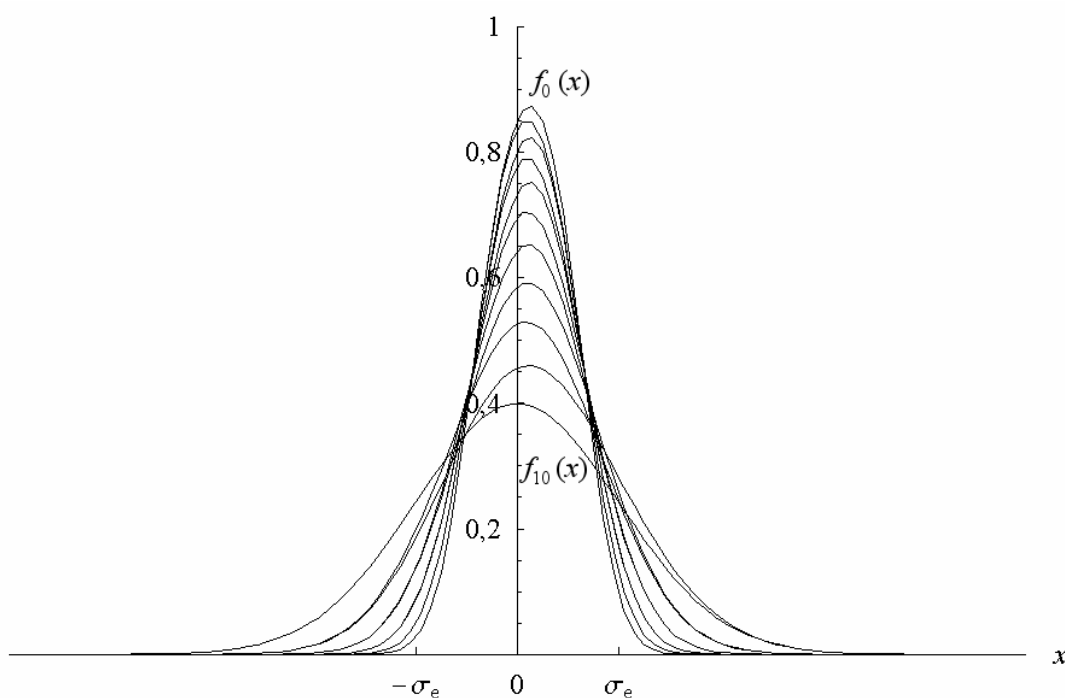
Najprej razložimo, zakaj maksimum povzroči zmanjšanje variance (in posledično RV napake poteze). Če manjša od vrednosti bratskih vozlišč ne bi imela vpliva na vrednost svojega starša, bi bila $f_{MAX_{i-1}}$ enaka f_{H_i} . Ker to ne drži, si moramo ogledati dva primera, označena na vrhu slike 40. Kadar je MAX_{i-1} prevelika ($MAX_{i-1} > \mu_{H_i}$), je najverjetnejši razlog za to, da je prevelika H_i ($H_i > \mu_{H_i}$). Manj verjeten razlog pa je, da H_i sicer ni prevelika ($H_i \leq \mu_{H_i}$), je pa močno prevelika L_i ($L_i > \mu_{H_i}$). Kadar je MAX_{i-1} premajhna

($MAX_{i-1} < \mu_{H_i}$), mora biti premajhna tudi H_i ($H_i < \mu_{H_i}$), kar se zgodi z enako verjetnostjo, kot da je prevelika. Lahko pa napako H_i popravi L_i s tem, da je večja od H_i ($H_i < L_i \leq \mu_{H_i}$). Ker je verjetnost za manjše L_i večja kot za večje, je koristen učinek L_i v drugem primeru večji od škodljivega v prvem. Zato L_i pravilnosti svojega starša MAX_{i-1} koristi bolj kot škoduje.

Če je nivo $i - 1$ vrste min, je vrednost vozlišča na njem slučajna spremenljivka $MIN_{i-1} = \min(L_i, H_i)$, gostota njene porazdelitve pa se izračuna z enačbo (31). Slika in razlaga učinkov minimuma je domala enaka kot pri maksimumu.

$$\begin{aligned} f_{MIN_{i-1}}(x) &= f_{L_i}(x)P(H_i > x) + f_{H_i}(x)P(L_i > x) = \\ &= f_{L_i}(x) \int_x^{\infty} f_{H_i}(h)dh + f_{H_i}(x) \int_x^{\infty} f_{L_i}(l)dl \end{aligned} \quad (31)$$

Enačbi (29) opisujeta gostoti porazdelitve na najnižjem nivoju preiskovanja, za vsak višji nivo pa je gostoto porazdelitve moč izračunati rekurzivno z izmenično uporabo enačb (30) in (31). Gostote porazdelitev hevrističnih vrednosti za vse nivoje pri $d = 10$ so prikazane na sliki 41; na vsakem nivoju je porazdelitev seveda več, a razlikujejo se samo po srednji vrednost – na sliki so tiste, pri katerih je prava vrednost 0.



Slika 41. Gostote porazdelitev hevrističnih vrednosti za deset nivojev, začenši s statičnimi vrednostmi

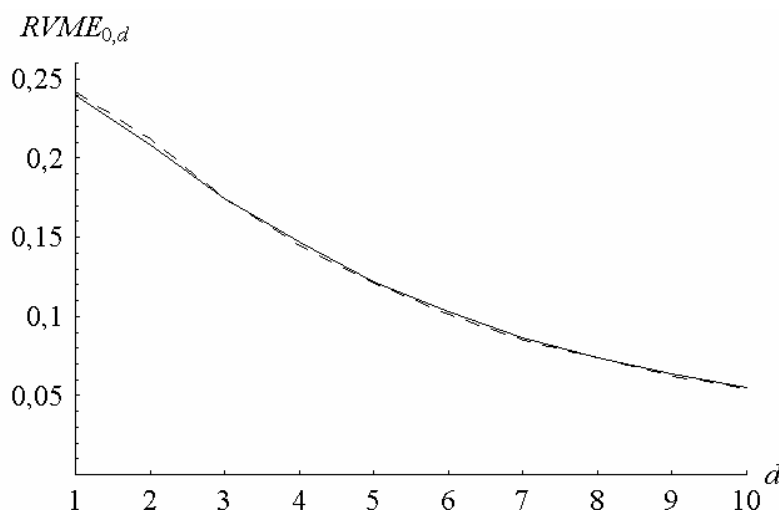
Na sliki 41 vidimo, da se vzpetine krivulj gostot porazdelitev hevrističnih vrednosti proti vrhu drevesa igre ožijo, kar pomeni, da se varianca hevrističnih vrednosti manjša. Ker je porazdelitev statičnih hevrističnih vrednosti neodvisna od globine preiskovanja in ker je razlika med pravimi vrednostmi bratskih vozlišč konstantna, je porazdelitev hevrističnih vrednosti na nivoju i pri globini preiskovanja d enaka porazdelitvi hevrističnih vrednosti v korenu pri globini preiskovanja $d - i$. Gostote porazdelitev na sliki zato ustrezajo hevrističnim vrednostim v korenu pri različnih globinah preiskovanja: od f_{10} pri $d = 0$ do f_0 pri $d = 10$. Torej se varianca hevrističnih vrednosti v

korenu z globino preiskovanja manjša, z njo pa se manjša tudi RV napaka poteze v korenu.

Preverimo še računsko, če se RV napaka poteze v korenu obnaša po pričakovanjih. Naj bo $RVME_{i,d}$ RV napaka poteze na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d . Tudi oznake hevrističnih vrednosti bomo na enak način razširili z dodatnim indeksom: namesto X_i bomo uporabljali $X_{i,d}$. Do napake poteze na i -tem nivoju pride, kadar se hevristični vrednosti bratskih vozlišč na nivoju $i + 1$ zamenjata, torej kadar $L_{i+1,d} > H_{i+1,d}$. $RVME_{i,d}$ tako izračunamo z enačbo (32).

$$RVME_{i,d} = P(L_{i+1,d} > H_{i+1,d}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{H_{i+1,d}}(h) \left(\int_h^{\infty} f_{L_{i+1,d}}(l) dl \right) dh \quad (32)$$

Slika 42 kaže RV napako poteze v korenu ($RVME_{0,d}$) v odvisnosti od globine preiskovanja (d); $d_{\max} = 10$. Polna črta je rezultat izračunov z enačbo (32), črtkana črta pa je rezultat simulacije, s kakršno smo v prejšnjih poglavjih ugotavljali lastnosti našega neodvisnega in odvisnega modela minimaksa.



Slika 42. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja (polna črta je izračunana, črtkana pa izmerjena s simulacijo)

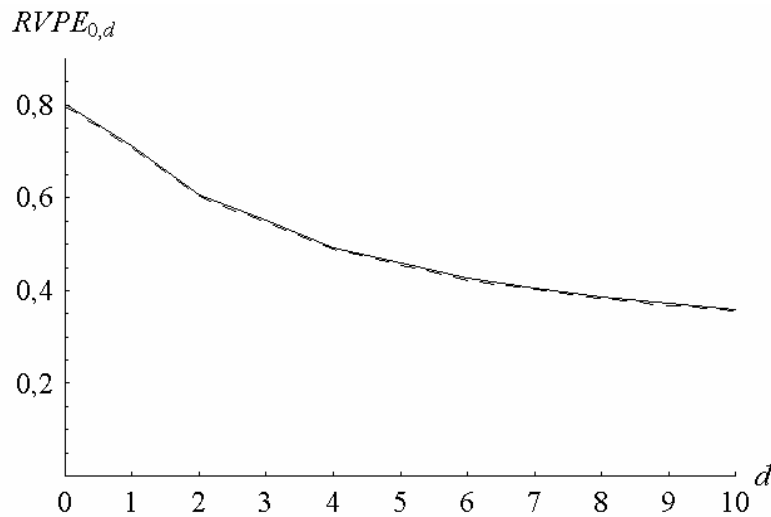
Kot vidimo na sliki 42, RV napaka poteze v korenu z globino res pada. To se sklada tako z opažanji v zvezi z varianco hevrističnih vrednosti, kot tudi z nepatološkostjo našega neodvisnega in odvisnega modela minimaksa. Padanje je na začetku bolj strmo, nato pa se upočasni. Tako obnašanje pojasnjuje slika 41, na kateri vidimo, da so razlike med krivuljami na višjih nivojih manjše, saj se ti višji nivoji pojavijo zgolj pri preiskovanjih do večjih globin. Razlog, da so si krivulje na višjih nivojih bolj podobne, pa je, da se je do tam napaka že precej zmanjšala in je tako prostora za nadaljnjo izboljšavo manj. Nekaj podobnega smo opazili že na sliki 34, dokončno pa bomo pojav pojasnili v naslednjem podpoglavju.

Oglejmo si še RV napako položaja. Na sliki 41 so prave vrednosti na vseh nivojih enake 0, hevristične vrednosti pa so od njih nekoliko odmaknjene v pozitivno smer. Večina tega odmika nastane na prvem nivoju nad najnižjim, kar je skladno z opažanji Sadikova idr. [55]. Varianca hevrističnih vrednosti ima na napako položaja sicer enak vpliv kot na napako poteze, a odmik bi to lahko spremenil. Naj bo $RVPE_{i,d}$ RV napaka položaja na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d . S tv_i bomo označili pravo

vrednost nekega vozlišča na nivoju i , s $HV_{i,d}$ pa pripadajočo hevristično vrednost po preiskovanju do globine d ; slednja je slučajna spremenljivka. Napaka položaja je enaka povprečni absolutni razliki med pravo in hevristično vrednostjo ter se izračuna z enačbo (33).

$$RVPE_{i,d} = \int_{-\infty}^{\infty} |tv_i - x| f_{HV_{i,d}}(x) dx \quad (33)$$

Slika 43 kaže RV napako položaja v korenu ($RVPE_{0,d}$) v odvisnosti od globine preiskovanja (d); $d_{\max} = 10$. Polna črta je rezultat izračunov z enačbo (33), črtkana črta pa je rezultat simulacije.



Slika 43. RV napaka položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja (polna črta je izračunana, črtkana pa izmerjena s simulacijo)

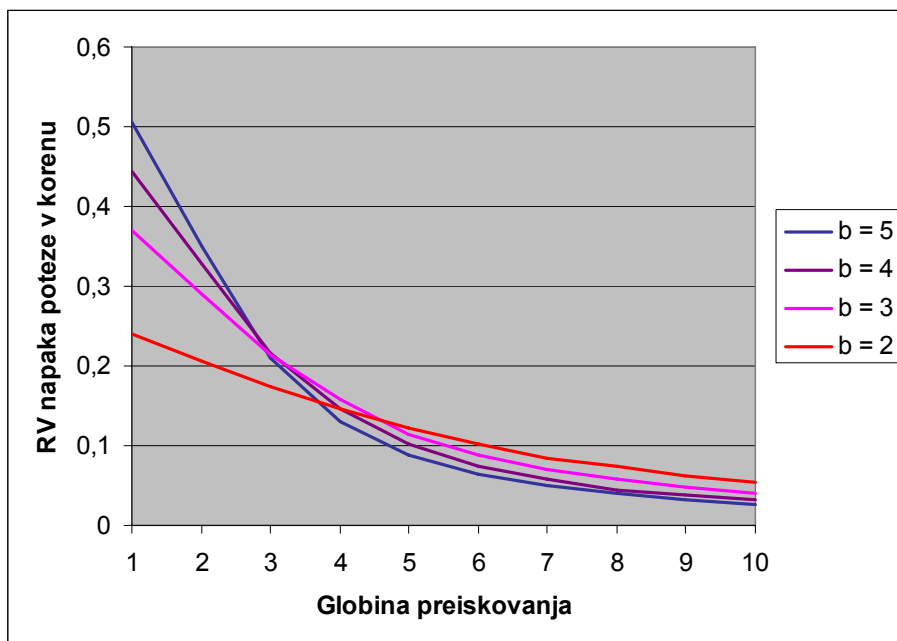
Kot vidimo na sliki 43, RV napaka položaja v korenu z globino pada. Očitno je pozitiven odmik hevrističnih vrednosti od pravih dovolj majhen, da ne povzroči patologije. To se nam je v luči zgodnjih poizkusov s šahovsko končnico Sadikova idr. [58] zdelo [36] presenetljivo, saj se je tam napaka položaja vedla patološko. A kasneje [55] se je izkazalo, da je temu botrovala neenaka vejitev obeh igralcev: kot smo opisali v razdelku 2.2.1, so se hevristične vrednosti z globino preiskovanja od pravih odmikale vedno bolj v smeri tistega igralca, ki je imel večjo vejitev. V končnicah, kjer je bila vejitev približno uravnotežena, pa do patologije ni prišlo.

5.2. Posplošitev modela

Enostavni model minimaksa je enostaven predvsem zaradi trojega: vejitve omejene na 2, konstantne razlike med pravimi vrednostmi bratskih vozlišč in v nekoliko manjši meri standardnega odklona statičnega šuma omejenega na 1. Te tri lastnosti modela je mogoče posplošiti. Če bi razliko med pravimi vrednostmi bratskih vozlišč znotraj drevesa igre sicer ohranili konstantno, a bi jo spremenili v nastavljiv parameter, bi na RV napako poteze vplivali enako kot s spreminjanjem standardnega odklona statičnega šuma, zato se s tem ne bomo ukvarjali.

Najprej si oglejmo, kaj se zgodi pri **vejitvah drevesa igre** večjih od 2. Da bo model še ostal enostaven in rezultati jasno razložljivi, naj imajo vozlišča na nivojih maks enega

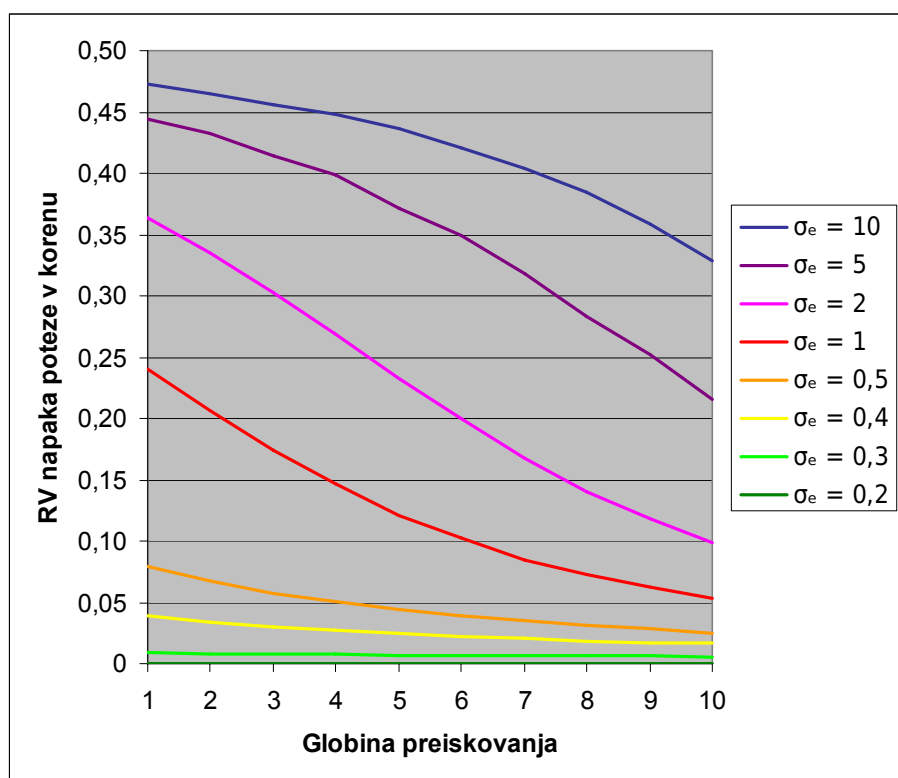
sina z večjo vrednostjo in $b - 1$ sinov z za 1 manjšimi vrednostmi; na nivojih min pa naj bo manjša vrednost ena sama in naj bo večjih $b - 1$. Rezultate smo zopet dobili s simulacijo, pri kateri smo za vsak poizkus tvorili od 2.500 do 10.000 naborov pravih vrednosti in 10 naborov hevrističnih vrednosti za vsak nabor pravih. Pri ostalih poizkusih v tem poglavju smo uporabili 10.000 naborov pravih vrednosti, saj je bila vejitev vedno 2. Slika 44 kaže RV napako poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih vejitvah; razlika med pravimi vrednostmi bratskih vozlišč je 1, $d_{\max} = 10$ in $\sigma_e = 1$.



Slika 44. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih vejitvah

Na sliki 44 vidimo, da je globlje preiskovanja z minimaksom pri večjih vejitvah bolj koristno. Ta pojav smo opazili že pri našem odvisnem modelu minimaksa na sliki 30. Zakaj je pri plitvih preiskovanjih RV napaka poteze v korenu pri večjih vejitvah večja, ni težko pojasniti: izbrati pravo potezo med več potezami je kratko malo težje kot med manj. Nenavadno pa se na prvi pogled zdi, da je pri globljih preiskovanjih ravno obratno. Kot vemo iz razlage ob sliki 40, je preiskovanje z minimaksom koristno, ker v vozliščih na nivojih maks manjša hevristična vrednost sina popravi večjo (na nivojih min pa večja manjšo). Če imamo na nivojih maks več manjših hevrističnih vrednosti, ima vsaka od njih enak koristen učinek, tako je skupna korist večja kot od ene same manjše vrednosti (na nivojih min je podobno). Prav to je razlog, zakaj pri večjih vejitvah preiskovanje z minimaksom bolj zmanjša napako v korenu.

Slika 45 kaže RV napako poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih **standardnih odklonih statičnega šuma**; $b = 2$, razlika med pravimi vrednostmi bratskih vozlišč je 1 in $d_{\max} = 10$.



Slika 45. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih standardnih odklonih statičnega šuma

Na sliki 45 vidimo, da se RV napaka poteze pri povečanju globine preiskovanja najbolj zmanjša pri $\sigma_e = 1$, pri večjih in manjših σ_e pa je preiskovanje manj koristno. Ta pojav smo opazili že pri našem odvisnem modelu minimaksa na sliki 34. Kot vemo iz razlage ob sliki 40, je preiskovanje z minimaksom koristno, ker v vozliščih na nivojih maks manjše hevristične vrednosti sinov popravijo največjo (na nivojih min pa večje najmanjšo). A če je varianca hevrističnih vrednosti majhna, na nivojih maks manjše vrednosti največje navadno sploh ne dosežejo, zato je pri majhnih σ_e koristi od preiskovanja malo (na nivojih min je podobno). Kolikor koristi vendarle je, se pojavi pri manjših globinah, saj varianca tam nima na voljo dovolj nivojev, da bi se preveč zmanjšala – zaradi tega pri majhnih σ_e napaka pri manjših globinah pada hitreje. Pri večjih σ_e se napaka poteze približa 0,5, kar je pri $b = 2$ največje možna napaka, ki pomeni naključne odločitve. Če je napaka blizu 0,5 že pri srednjih globinah, se pri majhnih ne more več dosti poslabšati, kar zmanjša koristnost preiskovanja do srednjih globin v primerjavi z majhnimi. Velike globine so v primerjavi s srednjimi še vedno koristne, ker ima tam napaka na voljo dovolj nivojev, da se zadosti oddalji od 0,5 (seveda pa bi z večanjem σ_e tudi ta korist splahnela).

Za konec se posvetimo še **razliki med pravimi vrednostmi bratskih vozlišč** v drevesu igre. Vprašanje, na katerega moramo odgovoriti, je, ali bi bile prave vrednosti lahko porazdeljene tako, da bi prišlo do patologije – ali bi s svojo porazdelitvijo lahko izničile opisani koristni učinek preiskovanja z minimaksom. Kratek razmislek nam pove, da se to ne more zgoditi. Denimo, da povsem splošno drevo igre preiskujemo do globin d in $d + 1$. Preiskovanje do globine $d + 1$ si lahko predstavljamo kot preiskovanje do globine d , kjer namesto običajne hevristične ocenjevalne funkcije e uporabimo e' , ostalo pa je enako. Funkcija e' preiskovanje drevesa poglobi za en nivo in nato pokliče e . Razlaga

ob sliki 41 nam pove, da vsak nivo preiskovanja varianco hevrističnih vrednosti zmanjša, s tem pa zmanjša tudi RV napako poteze. Torej je funkcija e' , kar se tiče napake poteze, bolj točna od e , to pa pomeni, da je napaka pri preiskovanju do globine $d + 1$ manjša kot pri preiskovanju do globine d in da do patologije ne pride.

Zaključimo lahko z ugotovitvijo, da je razlaga iz prejšnjega podpoglavja, zakaj povečanje globine preiskovanja z minimaksom zmanjša RV napako poteze v korenu drevesa igre, veljavna precej splošno. Z njo je mogoče pojasniti odsotnost patologije tudi v našem neodvisnem in odvisnem modelu minimaksa. Sicer je prav gotovo mogoče najti drevo igre ali hevristično ocenjevalno funkcijo, kjer patologija vendarle nastopi, vendar domnevamo, da so v primerjavi z nepatološkimi taka drevesa in take funkcije redki. RV napaki položaja se v tem podpoglavju nismo posvečali, ker je manj pomembna, smo pa opazili, da se vede podobno kot napaka poteze.

6. Patologija enoagentnega preiskovanja

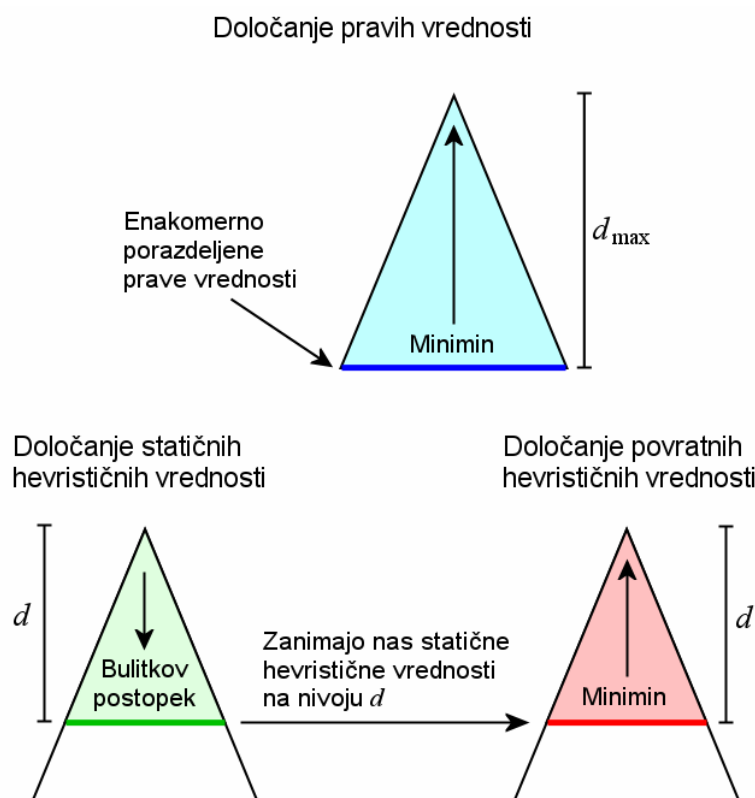
Kot smo povedali že uvodoma, ja patologija enoagentnega preiskovanja raziskana slabše od patologije minimaksa. Eden od razlogov je gotovo, da je znana šele od leta 2003, vendar ni edini. Patologija minimaksa je ob odkritju med raziskovalci zbudila veliko zanimanje, ker so prve raziskave kazale, da je preiskovanje z minimaksom pretežno patološko. Odkritelji patologije enoagentnega preiskovanja [15] pa so zgolj ugotovili, da do nje pride včasih. A po drugi strani je res, da je bila patologija minimaksa opažena le v teoretičnih modelih, patologija enoagentnega preiskovanja pa tudi pri reševanju uganke osmih ploščic, ki je (do neke mere) praktičen problem. Zato si slednja prav gotovo zasluži, da jo podrobneje preučimo.

V tem poglavju bomo najprej raziskali, kako pogosta je patologija v umetnih preiskovalnih drevesih, v kakršnih je bila odkrita, in kateri dejavniki nanjo vplivajo. Večino teh raziskav smo objavili v [30]. Nato bomo videli, da se patologija lahko pojavi tudi pri praktičnem problemu iskanja poti po zemljevidih iz računalniških iger, s čimer smo se ukvarjali v [16, 33]. Na koncu pa bomo po vzoru razlage koristnosti preiskovanja z minimaksom pokazali, zakaj je enoagentno preiskovanje koristno.

6.1. Patologija v umetnih preiskovalnih drevesih

Preučevanja patologije enoagentnega preiskovanja smo se lotili na podoben način kot patologije minimaksa: tvorili smo veliko število preiskovalnih dreves in na njih merili količine, ki so nas zanimale. Tudi *naš model enoagentnega preiskovanja* je podoben modeloma minimaksa – glede pravih vrednosti neodvisnemu, glede hevrističnih pa bolj odvisnemu, čeprav hevristične vrednosti vozlišč na istem nivoju med seboj niso odvisne. Za neodvisen model smo se odločili, ker se zdi bolj osnoven in ker bi sodeč po minimaksu v njem patologijo pričakovali prej.

Preiskovalnemu drevesu, zgrajenemu po pravilih našega modela enoagentnega preiskovanja, priredimo prave vrednosti v listih na nivoju $d_{\max}$. Te vrednosti so porazdeljene enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Prave vrednosti notranjih vozlišč z miniminom od spodaj navzgor izračunamo iz pravih vrednosti listov: vsakemu vozlišču priredimo minimum vrednosti njegovih naslednikov. Kadar drevo preiskujemo do globine d , tam določimo statične hevristične vrednosti. Določanje hevrističnih vrednosti lahko poteka na različne načine, a za začetek bomo izbrali takega, kot so ga uporabili Bulitko idr. [15]. Za to potrebujemo statične hevristične vrednosti, ki pripadajo globinam preiskovanja manjšim od d . Statična hevristična vrednost korena (pri globini preiskovanja 0) je porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, f^*(koren)]$, pri čemer je $f^*(x)$ prava vrednost vozlišča x . Statična hevristična vrednost vozlišča x na nivoju i (pri globini preiskovanja i) je porazdeljena enakomerno na intervalu $[f^*(starš(x)), f^*(x)]$. Te vrednosti računamo od zgoraj navzdol, dokler i ne doseže d . Opisani postopek zagotavlja, da imajo statične hevristične vrednosti obe zaželeni lastnosti: so popolne (manjše od pravih vrednosti, kar se vidi iz zgornjih mej intervalov) in monotono nepadajoče (večje od statičnih hevrističnih vrednosti staršev, kar se vidi iz spodnjih mej intervalov). O teh dveh lastnostih navadno govorimo kot o lastnostih hevristične ocenjevalne funkcije, a statične hevristične vrednosti niso nič drugega kot tisto, kar vrača ocenjevalna funkcija. Povratne hevristične vrednosti na nivojih višje od d dobimo z miniminom iz statičnih hevrističnih vrednosti na nivoju d . Postopek je prikazan na sliki 6.



Slika 46. Tvorba preiskovalnih dreves po pravilih našega modela enoagentnega preiskovanja

Preiskovalna drevesa tvorjena po pravilih našega modela so določena s tremi parametri:

- vejitvijo b ,
- največjo globino preiskovanja $d_{\max}$,
- hevristično ocenjevalno funkcijo; zaenkrat smo predstavili le Bulitkovo, v razdelku 6.1.3 pa jih bomo opisali še nekaj.

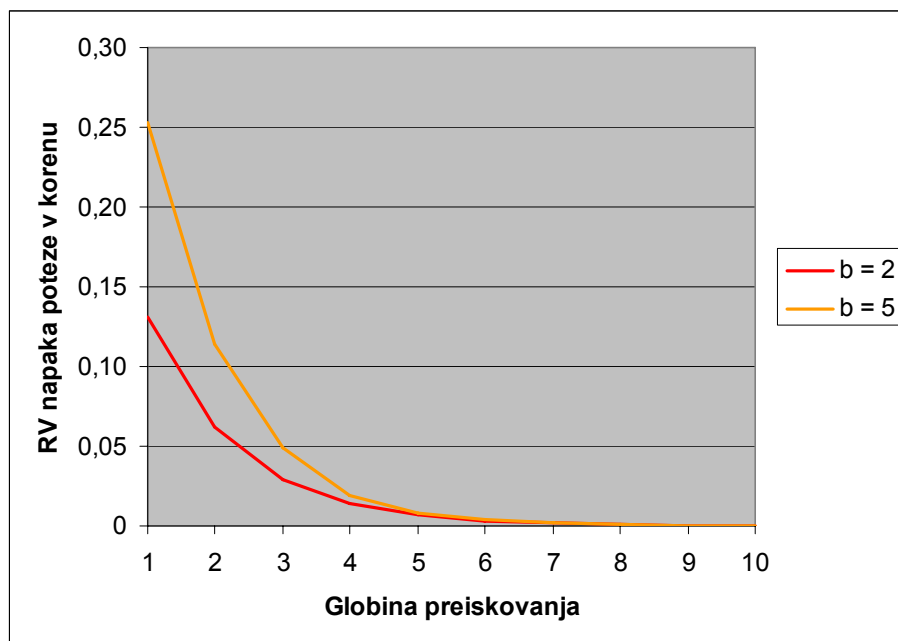
Kot pri minimaksu smo večinoma uporabljali $b = 2$, saj so bili rezultati pri večjih vejitvah kvalitativno podobni, simulacija pa bistveno bolj dolgotrajna. Pri $b = 2$ smo za vsak poizkus tvorili 10.000 naborov pravih vrednosti preiskovalnega drevesa in za vsak nabor pravih vrednosti še 10 naborov hevrističnih vrednosti. Za $d_{\max}$ smo uporabljali 10, saj večje globine niso prinesle nobenih pomembnih dodatnih informacij, so pa simulacijo znatno podaljšale.

6.1.1. Ugotavljanje patološkosti pri Bulitkovi ocenjevalni funkciji

Prvo vprašanje, ki se ob rezultatu Bulitka idr. [15] zastavi, je, ali je patologija pogosta ali se pojavlja zgolj v posebnih primerih. Enako kot pri minimaksu tudi pri enoagentnem preiskovanju patološkost ugotovimo tako, da pri različnih globinah preiskovanja iz povratnih pravih in hevrističnih vrednosti izračunamo napako v korenu in opazujemo, ali je pri večjih globinah večja. Pri enoagentnem preiskovanju se bomo omejili na RV napako poteze. Razlog za omejitev na realne vrednosti je, da so te pri problemih enoagentnega iskanja dokaj običajne: denimo pri iskanju poti po prostoru imamo opraviti z fizičnimi razdaljami, ki se navadno merijo s približki realnih vrednosti. Z napako položaja pa se ne bomo ukvarjali, ker značilne hevristične

ocenjevalne funkcije jasno kažejo, da natančna ocena položaja ni njihov namen – v prizadevanju za popolnost namreč pravo vrednost pogosto znatno podcenijo.

Slika 47 kaže RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri $b = 2$ in 5 , $d_{\max} = 10$ in Bulitkovi ocenjevalni funkciji. Pri $b = 5$ smo namesto 10.000 naborov pravih vrednosti tvorili le 2.500.



Slika 47. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja pri Bulitkovi ocenjevalni funkciji

Kot vidimo na sliki 47, do patologije pri uporabi Bulitkove ocenjevalne funkcije ne pride. Še več, napaka se z globino zmanjšuje hitreje, kot se je pri minimaksu kdajkoli v naših poizkusih. A graf napake v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja ne pove vsega – od Bulitka idr. vemo, da je patologija možna, tako da bi v nekaterih kombinacijah preiskovalnega drevesa in hevristične ocenjevalne funkcije do nje vendarle morale priti. Zato bomo ugotavljali še patološkost po definiciji Bulitka idr.: po njihovem je preiskovalno drevo patološko, če za vsaj en par sosednjih globin preiskovanja d in $d + 1 \leq d_{\max}$ velja $RVME_{0,d} < RVME_{0,d+1}$; $RVME_{i,d}$ je RV napaka poteze, ki je definirana enako kot pri minimaksu. $Bpat$ naj bo tako verjetnost, da drevo izpolnjuje Bulitkov pogoj za patološkost, merili pa smo jo kot delež patoloških dreves v enem poizkusu. Mera $Bpat$ je blažja od mere pat , ki smo jo uporabljali pri minimaksu: pove le, da se v drevesu obstaja primer, ko se napaka pri povečanju globine preiskovanja poveča, medtem ko pat pove, da se napaka pri povečanju globine preiskovanja poveča v povprečju. Po zgledu [16, 33] bomo definicijo $Bpat$ razširili še s *stopnjo patologije* (angl. degree of pathology), ki pomeni število parov sosednjih globin preiskovanja, za katere velja $RVME_{0,d} < RVME_{0,d+1}$. $Bpat(n)$ je verjetnost, da se v drevesu pojavi patologija stopnje n ; $Bpat(0)$ je verjetnost, da drevo ni patološko. Razpredelnica 3 kaže patološkost po Bulitku v poizkusu s slike 47.

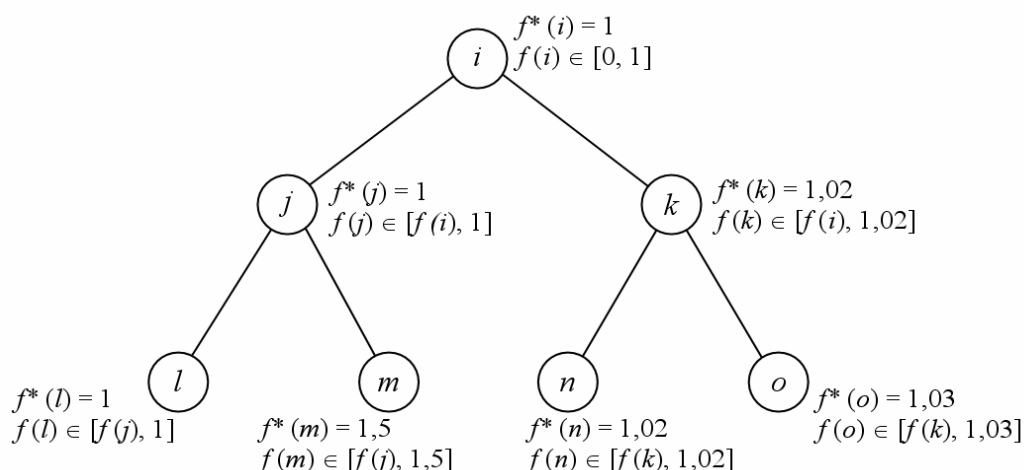
Stopnja patologije n	0	1	2	3	4	≥ 5
$Bpat(n)$ pri $b = 2$ [%]	91,8	7,5	0,6	0,1	0,0	0,0
$Bpat(n)$ pri $b = 5$ [%]	88,6	10,6	0,8	0,0	0,0	0,0

Razpredelnica 3. Patološkost po Bulitku pri Bulitkovi ocenjevalni funkciji

Kot vidimo v razpredelnici 3, tudi patologije po Bulitku ni veliko, kar se sklada s sliko 47. Vseeno pa se lahko vprašamo, zakaj do nje pride. Ponujata se dva razloga: sama narava problema in izbira hevristične ocenjevalne funkcije.

6.1.2. Vpliv narave problema na patologijo

Za razlago vpliva narave problema na patologijo bomo uporabili preiskovalna drevesa višine 2. Tako bomo lahko razložili patološkost drevesa, na katerem so Bulitko idr. [15] pojav prvič pokazali, saj je to drevo tudi višine 2, poleg tega pa bo razlaga enostavnejša. Slika 48 kaže Bulitkovo drevo; vozlišča so označena s črkami, poleg njih pa so zapisane prave in hevristične vrednosti.



Slika 48. Drevo, na katerem so Bulitko idr. prvič pokazali patologijo enoagentnega preiskovanja

Drevo na sliki 48 je patološko, če je RV napaka poteze v korenu večja, kadar ga preiščemo do globine 2, kot kadar ga preiščemo do globine 1. Pogoje za patološkost tako zapišemo kot $RVME_{0,2} > RVME_{0,1}$. Ker je $f^*(j) < f^*(k)$ in torej prava poteza vodi v vozlišče j , do napake poteze pride, kadar je $f(k) < f(j)$ in zato hevristična ocenjevalna funkcija predlaga potezo, ki vodi v vozlišče k . Za izračun verjetnosti tega dogodka bomo hevristične vrednosti vozlišč obravnavali kot slučajne spremenljivke. V ta namen bomo $f(x)$, kadar je rezultat preiskovanja d nivojev pod x , zapisali kot X_d ; $f^*(x)$ bomo zapisali kot X^* . Tak zapis ni le običajen za slučajne spremenljivke, ampak nam bo tudi pomagal ločevati f , ki pomeni hevristično ocenjevalno funkcijo, od f , ki pomeni gostoto porazdelitve. Z $f_{Xd}(x_d)$ bomo namreč označili gostoto porazdelitve X_d . Kadar bo f_{Xd} odvisna od dodatne spremenljivke y , jo bomo zapisali kot $f_{Xd}(x_d, y)$.

V drevesu na sliki 48 do RV napake poteze v korenu po preiskovanju do globine 1 pride, kadar je $K_0 < J_0$. Da lahko izračunamo $RVME_{0,1}$, moramo torej poznati porazdelitev statične hevristične vrednosti X_0 . Porazdeljena je enakomerno med statično

hevristično vrednostjo svojega starša s in pravo vrednostjo lastnega vozlišča X^* , tako da je gostota njene porazdelitve podana z enačbo (34).

$$f_{X_0}(x_0, s) = \frac{1}{X^* - s} \quad (34)$$

Zdaj lahko zapišemo enačbo za $RVME_{0,1}^B$, pri čemer z indeksom ^B označimo, da velja le za Bulitkovo ocenjevalno funkcijo. Pri izračunu moramo upoštevati vse možne vrednosti K_0 in J_0 , pri katerih je izpolnjen pogoj $K_0 < J_0$, ter vse možne vrednosti I_0 , ker I_0 vpliva na porazdelitev K_0 in J_0 . Rezultat je enačba (35).

$$\begin{aligned} RVME_{0,1}^B &= P(K_0 < J_0) = \int_0^{I^*} \int_{i_0}^{J^*} \int_{i_0}^{j_0} f_{J_0}(j_0, i_0) f_{K_0}(k_0, i_0) dk_0 dj_0 di_0 = \\ &= \int_0^{I^*} \int_{i_0}^{J^*} \int_{i_0}^{j_0} \frac{1}{J^* - i_0} \frac{1}{K^* - i_0} dk_0 dj_0 di_0 \end{aligned} \quad (35)$$

Do RV napake poteze po preiskovanju do globine 2 pride, kadar je $K_1 < J_1$. Da lahko izračunamo $RVME_{0,2}$, moramo torej poznati porazdelitev hevristične vrednosti X_1 . Ta vrednost je rezultat preiskovanja iz vozlišča x do globine 1 in je torej enaka minimumu statičnih hevrističnih vrednosti sinov x , ki ju označimo z y in z : $X_1 = \min(Y_0, Z_0)$. Kot vemo iz enačbe (34), sta porazdelitvi Y_0 in Z_0 odvisni od statične hevristične vrednosti svojega starša x – to vrednost označimo z x_0 . Gostota porazdelitve X_1 je tako tudi funkcija x_0 in je podana z enačbo (36).

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1, x_0) &= f_{Y_0}(x_1, x_0) P(x_1 < Z_0) + f_{Z_0}(x_1, x_0) P(x_1 < Y_0) = \\ &= f_{Y_0}(x_1, x_0) \int_{x_1}^{Z^*} f_{Z_0}(z_0, x_0) dz_0 + f_{Z_0}(x_1, x_0) \int_{x_1}^{Y^*} f_{Y_0}(y_0, x_0) dy_0 = \\ &= \frac{1}{Y^* - x_0} \int_{x_1}^{Z^*} \frac{1}{Z^* - x_0} dz_0 + \frac{1}{Z^* - x_0} \int_{x_1}^{Y^*} \frac{1}{Y^* - x_0} dy_0 \end{aligned} \quad (36)$$

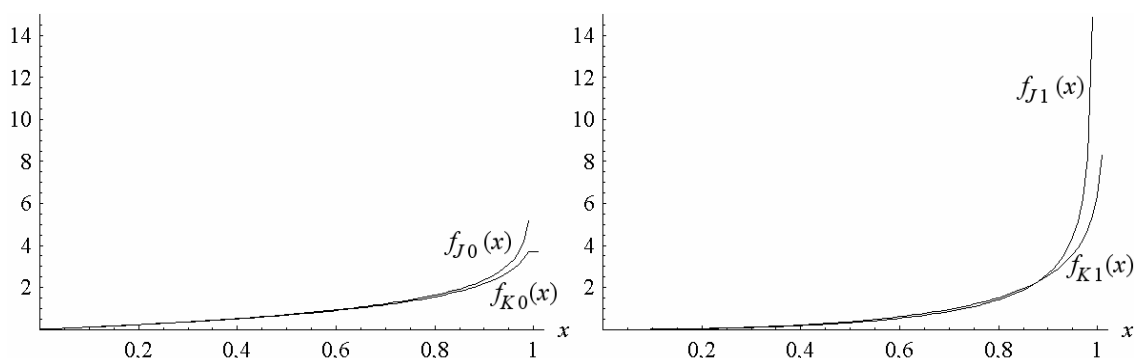
Zdaj lahko zapišemo enačbo za $RVME_{0,2}^B$. Pri izračunu moramo upoštevati vse možne vrednosti K_1 in J_1 , pri katerih je izpolnjen pogoj $K_1 < J_1$, vse možne vrednosti K_0 in J_0 , ker K_0 in J_0 vplivata na porazdelitev K_1 in J_1 , ter vse možne vrednosti I_0 , ker I_0 vpliva na porazdelitev K_0 in J_0 . Rezultat je enačba (37), v kateri se f_{J_1} in f_{K_1} izračunata z enačbo (36).

$$\begin{aligned} RVME_{0,2}^B &= P(K_1 < J_1) = \\ &= \int_0^{I^*} \int_{i_0}^{J^*} \int_{i_0}^{j_0} f_{J_0}(j_0, i_0) f_{K_0}(k_0, i_0) \int_{j_0}^{J^*} \int_{k_0}^{j_1} f_{J_1}(j_1, j_0) f_{K_1}(k_1, k_0) dk_1 dj_1 dk_0 dj_0 di_0 = \\ &= \int_0^{I^*} \int_{i_0}^{J^*} \int_{i_0}^{j_0} \frac{1}{J^* - i_0} \frac{1}{K^* - i_0} \int_{j_0}^{J^*} \int_{k_0}^{j_1} f_{J_1}(j_1, j_0) f_{K_1}(k_1, k_0) dk_1 dj_1 dk_0 dj_0 di_0 \end{aligned} \quad (37)$$

Preizkusimo zdaj enačbi (35) in (37) na preiskovalnem drevesu na sliki 48: $RVME_{0,2}^B = 0,486 > 0,461 = RVME_{0,1}^B$. Rezultat je enak kot pri Bulitku idr.

Opremljeni s potrebnimi matematičnimi orodji se lahko posvetimo **prvemu razlogu za patologijo**, ki izvira iz narave problema. Za njegovo razumevanje si moramo ogledati gostote porazdelitev hevrističnih vrednosti vozlišč na nivoju 1 pri preiskovanjih do

različnih globin. Slika 49 kaže gostoti porazdelitev hevrističnih vrednosti J in K v preiskovalnem drevesu na sliki 48: na levi strani pri preiskovanju do globine 1, na desni strani pa pri preiskovanju do globine 2. Vrednosti J_0 in K_0 sta povprečeni po vseh možnih vrednostih I_0 , J_1 in K_1 pa tudi po vseh možnih vrednostih J_0 in K_0 .



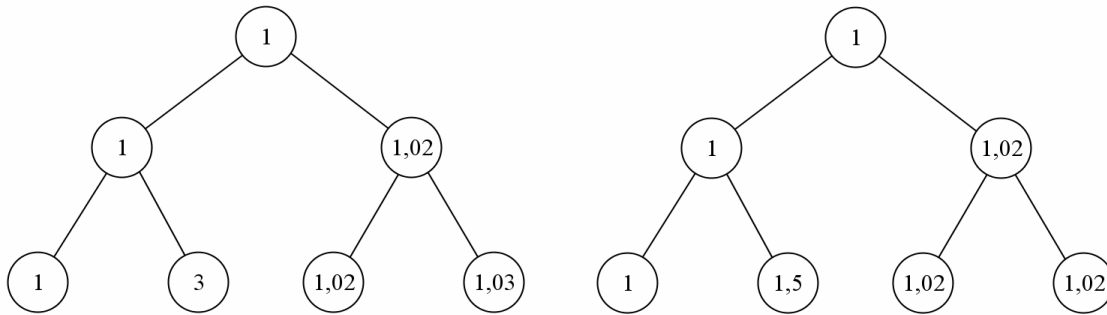
Slika 49. Razlaga prvega razloga za patologijo na Bulitkovem preiskovalnem drevesu

Naša naloga je pojasniti, zakaj v preiskovalnem drevesu na sliki 48 velja $RVME_{0,2}^B > RVME_{0,1}^B$ ali, zapisano drugače, zakaj je $P(K_1 < J_1) > P(K_0 < J_0)$. Povratne hevristične vrednosti vozlišč so večje od statičnih, ker je povratna vrednost vozlišča enaka hevristični vrednosti enega od naslednikov, Bulitkova ocenjevalna funkcija pa določa, da so hevristične vrednosti naslednikov večje od statične hevristične vrednosti starša. Z drugimi besedami, povečanje globine preiskovanja z 1 na 2 poveča povratne hevristične vrednosti. To se vidi tudi na sliki 49, kjer sta $f_{J1}(x)$ in $f_{K1}(x)$ večji pri večjih vrednostih x , $f_{J0}(x)$ in $f_{K0}(x)$ pa pri manjših. Do patologije pride, ker je to povečanje povratnih hevrističnih vrednosti pri K manjše kot pri J , kar tudi lahko vidimo na sliki: $f_{K1}(x)$ je glede na $f_{K0}(x)$ pri vrednostih x blizu 1 večja manj kot $f_{J1}(x)$ glede na $f_{J0}(x)$. Ker je v povprečju $K > J$, ima to za posledico, da je K_1 bližje J_1 kot K_0 J_0 , to pa povzroči, da se vrednosti K_1 in J_1 glede na K^* in J^* zamenjata lažje kot vrednosti K_0 in J_0 – pride do patološke situacije, kjer je $P(K_1 < J_1) > P(K_0 < J_0)$. Da bomo razumeli, zakaj sta si K_1 in J_1 bližje kot K_0 in J_0 , se spomnimo, da je $K_1 = \min(N_0, O_0)$ in $J_1 = \min(L_0, M_0)$. Vzemimo dve slučajni spremenljivki X in Y . Če je $Z = \min(X, Y)$, je Z v povprečju manjša od X in Y , ker za nekatere vrednosti $X = x$ obstaja verjetnost, da je Y (in torej Z) manjša od x , in obratno, za nekatere vrednosti $Y = y$ obstaja verjetnost, da je X (in torej Z) manjša od y . Če je Y dosti večja od X , je Z podobna X , ker je vpliv Y na Z majhen. Bliže ko sta si X in Y , večji je učinek Y na Z , in ker ta učinek Z lahko le zmanjša, velja, da bliže ko sta si X in Y , manjša je Z . Ker sta si N_0 in O_0 bistveno bližje kot L_0 in M_0 , pri povečanju globine preiskovanja ta učinek $K_1 = \min(N_0, O_0)$ glede na K_0 zmanjša bolj kot $J_1 = \min(L_0, M_0)$ glede na J_0 . Ker je v povprečju $K > J$, je to razlog, da sta si K_1 in J_1 bližje kot K_0 in J_0 , kar povzroči patologijo.

Preiskovalno drevo na sliki 48 nam tako pokaže prvi razlog za patologijo, ki je izvira iz narave problema (ali z drugimi besedami pravih vrednosti vozlišč drevesa): nasledniki prvonivojskega vozlišča z najmanjšo pravo vrednostjo so drug od drugega oddaljeni bolj kot nasledniki ostalih prvonivojskih vozlišč. Tej lastnosti dreves bomo rekli *lastnost 1*.

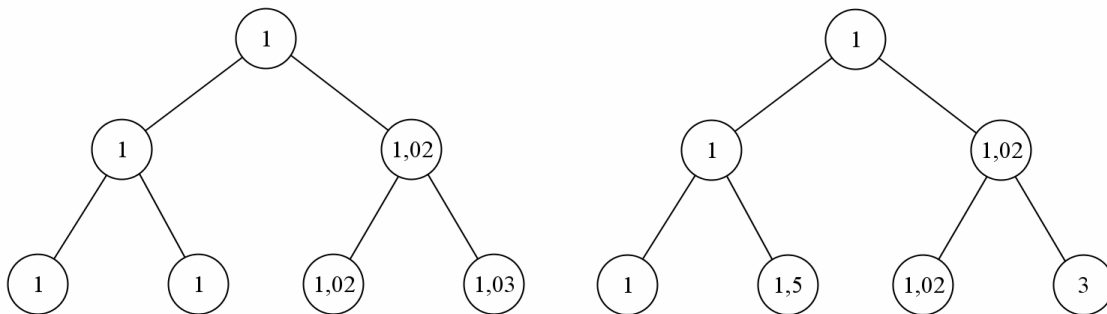
Učinek lastnosti 1 na patologijo lahko jasno pokažemo tako, da za izhodišče vzamemo preiskovalno drevo s slike 48, nato pa mu to lastnost načrtno okrepimo ali oslabimo. Na sliki 50 sta dve drevesi, pri katerih je lastnost 1 okrepljena; števila v vozliščih so njihove prave vrednosti. Pri preiskovanju do globine 1 je RV napaka poteze pri obeh

drevesih enaka kot pri izvirnem: $RVME_{0,1}^B = 0,461$. Pri preiskovanju do globine 2 pa je pri obeh večja od izvirne ($RVME_{0,2}^B = 0,486$): pri levem 0,507, pri desnem pa 0,492.



Slika 50. Bulitkovi preiskovalni drevesi z okrepljeno lastnostjo 1

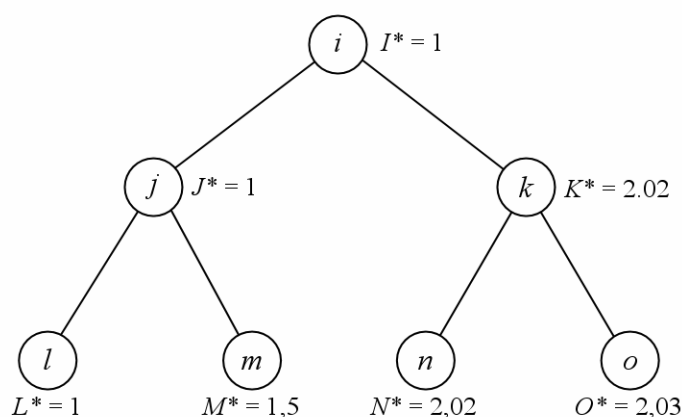
Na sliki 51 sta dve drevesi, pri katerih je lastnost 1 oslABLJENA. Pri preiskovanju do globine 1 je RV napaka poteze spet pri obeh enaka kot pri izvirnem drevesu: $RVME_{0,1}^B = 0,461$. Pri preiskovanju do globine 2 pa je pri obeh manjša od izvirne ($RVME_{0,2}^B = 0,486$): pri levem 0,426, pri desnem pa 0,391.



Slika 51. Bulitkovi preiskovalni drevesi z oslABLJENO lastnostjo 1

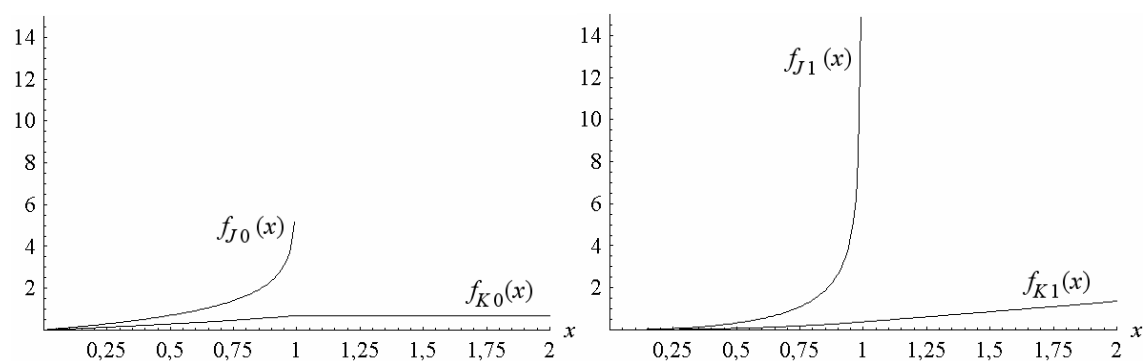
Našli smo tudi **drugi razlog za patologijo**, ki izvira iz narave problema: razlika med pravimi vrednostmi prvonivojskih vozlišč preiskovalnega drevesa je glede na vrednost teh vozlišč majhna. Tej lastnosti dreves bomo rekli *lastnost 2*.

Najprej smo preverili, da je razlog za patologijo res razlika med pravimi vrednostmi prvonivojskih vozlišč glede na vrednosti teh vozlišč, ne razlika kar tako. Za izhodišče smo vzeli preiskovalno drevo na sliki 48, nato pa mu vse prave vrednosti vozlišč enkrat podvojili in enkrat razpolovili. V obeh primerih sta RV napaka poteze in posledično patološkost ostali nespremenjeni. Na kakšen način lastnost 2 doseže svoj učinek, bomo razložili na drevesu na sliki 52, ki je sorodno tistemu na sliki 48, le da ima lastnost 2 močno oslABLJENO: $RVME_{0,1}^B = 0,152$ in $RVME_{0,2}^B = 0,062$, kar pomeni, da ni več patološko.



Slika 52. Preiskovalno drevo, na katerem bomo razložili delovanje lastnosti 2

Slika 53 kaže gostoti porazdelitev hevrističnih vrednosti J in K v preiskovalnem drevesu na sliki 52: na levi strani pri preiskovanju do globine 1, na desni strani pa pri preiskovanju do globine 2. Vrednosti J_0 in K_0 sta povprečeni po vseh možnih vrednostih J_0 , J_1 in K_1 pa tudi po vseh možnih vrednostih J_0 in K_0 .

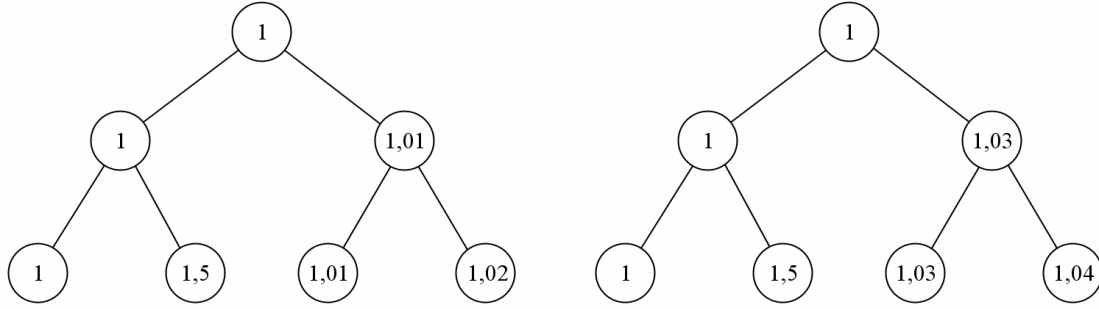


Slika 53. Razlaga drugega razloga za patologijo na preiskovalnem drevesu s slike 52

Na sliki 53 vidimo, da sta hevristični vrednosti J_1 in K_1 večji od J_0 in K_0 . Ta pojav smo že razložili ob sliki 49. Prav tako vidimo, da se $f_K(x)$ blizu K^* poveča manj kot $f_J(x)$ blizu J^* . Tudi to smo že razložili ob sliki 49, le da tam nismo razlikovali med J^* in K^* , ker sta bili ti dve vrednosti zelo blizu skupaj. Prav to pa je ključna razlika med slikama 49 in 53. Verjetnost, da je hevristična vrednost X na nekem intervalu, namreč ponazarja površina pod tistim delom krivulje $f_X(x)$, kjer je na tam intervalu x . Glede na površino pod krivuljo gostote porazdelitve pa K pri povečanju globine preiskovanja zraste bolj kot J , ker mu velika razlika med J^* in K^* da prostor za rast. Ker je v povprečju $K > J$, ima to za posledico, da je K_1 dlje od J_1 kot K_0 od J_0 , kar poskrbi, da do patologije ne pride. Očitno torej velika razlika med pravimi vrednostmi prvonivojskih vozlišč patologijo res preprečuje, majhna pa jo povzroča.

Tudi učinek lastnosti 2 lahko potrdimo s tem, da jo pri drevesu s slike 48 okrepimo in oslabimo. V izvirnem drevesu velja $RVME_{0,1}^B = 0,461$ in $RVME_{0,2}^B = 0,486$, kar pomeni 5,3 % večjo napako pri povečanju globine preiskovanja z 1 na 2. Levo drevo na sliki 54 ima lastnost 2 okrepjeno: v njem velja $RVME_{0,1}^B = 0,477$ in $RVME_{0,2}^B = 0,517$, kar pomeni, da pri povečanju globine preiskovanja napaka zraste za 8,3 %, in je torej bolj patološko od izvirnega. Desno drevo pa ima lastnost 2 oslABLJENO: v njem velja

$RVME_{0,1}^B = 0,447$ in $RVME_{0,2}^B = 0,460$, kar pomeni, da pri povečanju globine preiskovanja napaka zraste le za 2,9 %, in je manj patološko od izvirnega.



Slika 54. Bulitkovi preiskovalni drevesi z okrepljeno (levo) in oslabljeno (desno) lastnostjo 2

Pomanjkljivost naših ugotovitev o vplivu lastnosti 1 in 2 na patologijo je, da govorijo zgolj o preiskovanju do globine 2. Da bi jih razširili na večje globine, smo uporabili simulacijo, v kateri smo naključno tvorjena drevesa razporedili v skupine glede na ti dve lastnosti in patološkost izmerili za vsako skupino posebej. V ta namen smo morali lastnosti definirati na merljiv način. Naj lastnost 1 opisuje količina *prop1* na intervalu $[-1, 1]$: majhne vrednosti pomenijo, da lastnost 1 patologijo preprečuje, velike pa, da jo spodbuja. Naj bo $\sin_i(x)$ *i*-ti sin vozlišča *x*, $\sin_{\min}(x)$ pa najmanjši sin tega vozlišča. Kot vemo, patologijo spodbujajo velike razlike med pravimi vrednostmi sinov najmanjšega prvonivojskega vozlišča, preprečujejo pa jo velike razlike med pravimi vrednostmi sinov ostalih prvonivojskih vozlišč. To opisuje enačba (38).

$$s_{\min} = \sum_{j=0}^{b-1} (f^*(\sin_j(\sin_{\min}(\text{koren}))) - f^*(\sin_{\min}(\text{koren})))$$

$$s_{\text{ostali}} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \min}}^{b-1} \sum_{j=0}^{b-1} (f^*(\sin_j(\sin_i(\text{koren}))) - f^*(\sin_i(\text{koren}))) \quad (38)$$

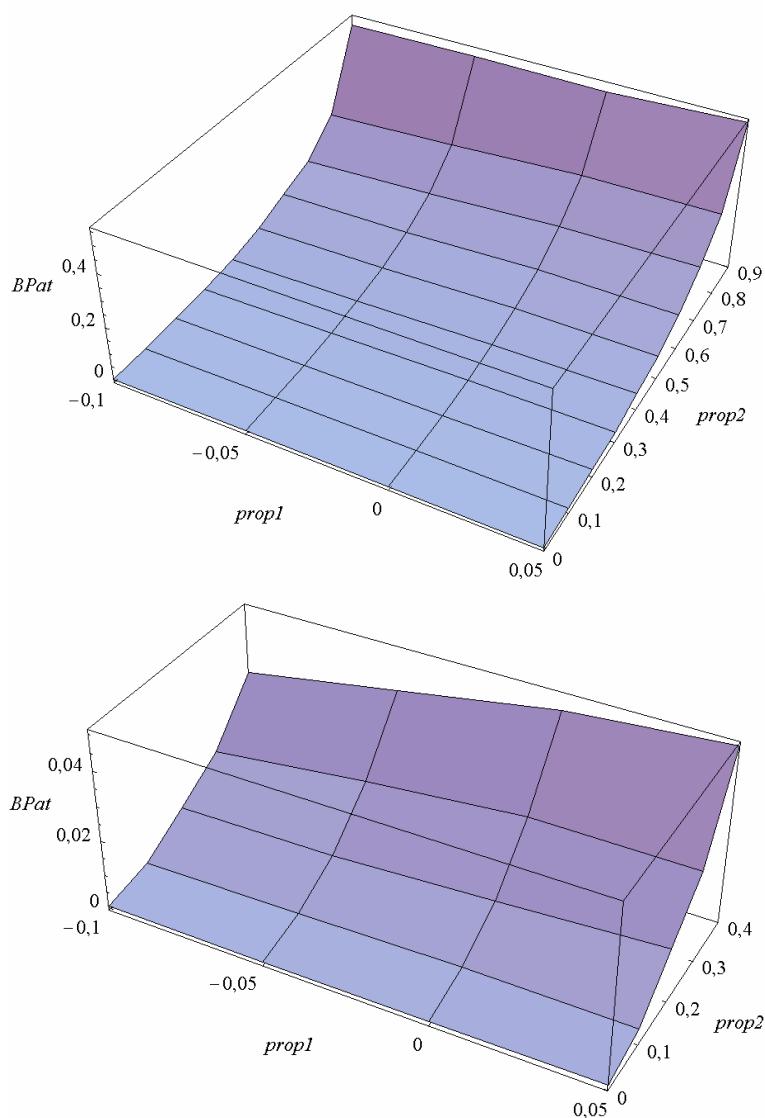
$$\text{prop1} = -e^{-s_{\min}} + e^{s_{\text{ostali}}}$$

Lastnost 2 naj opisuje količina *prop2* na intervalu $[0, 1]$: majhne vrednosti spet pomenijo, da lastnost 2 patologijo preprečuje, velike pa, da jo spodbuja. Kot vemo, patologijo spodbuja majhna razlika med pravimi vrednostmi prvonivojskih vozlišč glede na vrednost teh vozlišč, kar lahko izrazimo kot majhno razliko med pravo vrednostjo najmanjšega prvonivojskega vozlišča in povprečno vrednostjo njegovih bratov. To opisuje enačba (39).

$$\text{prop2} = \frac{f^*(\sin_{\min}(\text{koren}))(b-1)}{\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \min}}^{b-1} f^*(\sin_i(\text{koren}))} \quad (39)$$

Slika 55 kaže patološkost po Bulitku v odvisnosti od *prop1* in *prop2*; $b = 2$, $d_{\max} = 10$ in hevristična ocenjevalna funkcija je Bulitkova. Ker smo potrebovali dovoljšnje število primerov za vsako skupino preiskovalnih dreves glede na *prop1* in *prop2*, smo tvorili kar 100.000 naborov pravih vrednosti drevesa in za vsak nabor še 100 naborov hevrističnih vrednosti. Izpustili smo tiste skupine, ki so vsebovale manj kot pet

primerov, ker so meritve na tako majhnih vzorcih nezanesljive. Na zgornjem grafu je prikazan ves razpon *prop2*, na spodnjem pa le polovica, ker se na zgornjem ne vidi dobro, kako se *prop1* vede pri majhnem *prop2*.



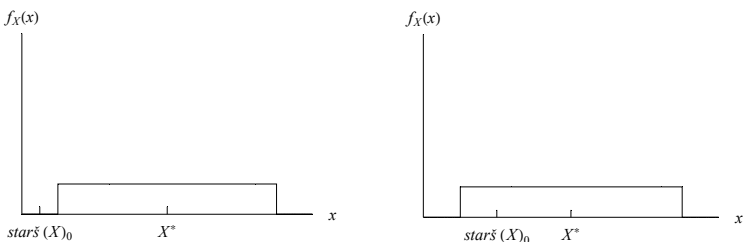
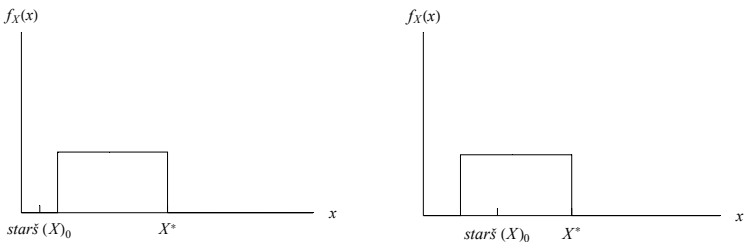
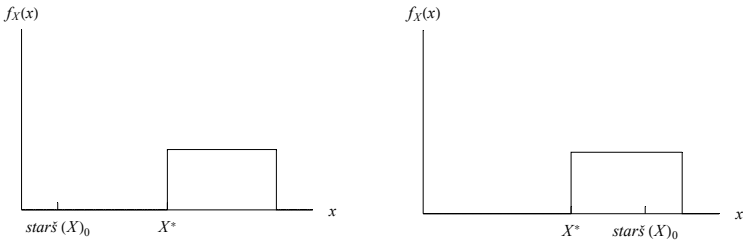
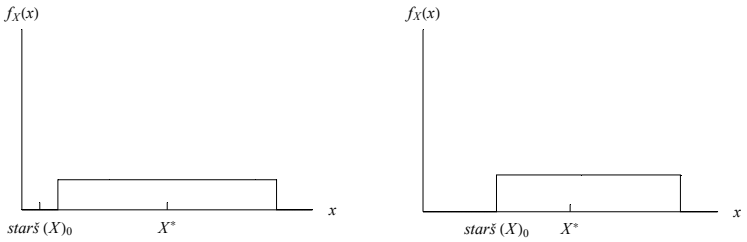
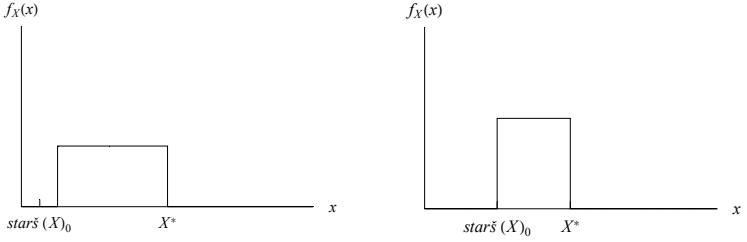
Slika 55. Patološkost po Bulitku v odvisnosti od *prop1* in *prop2*

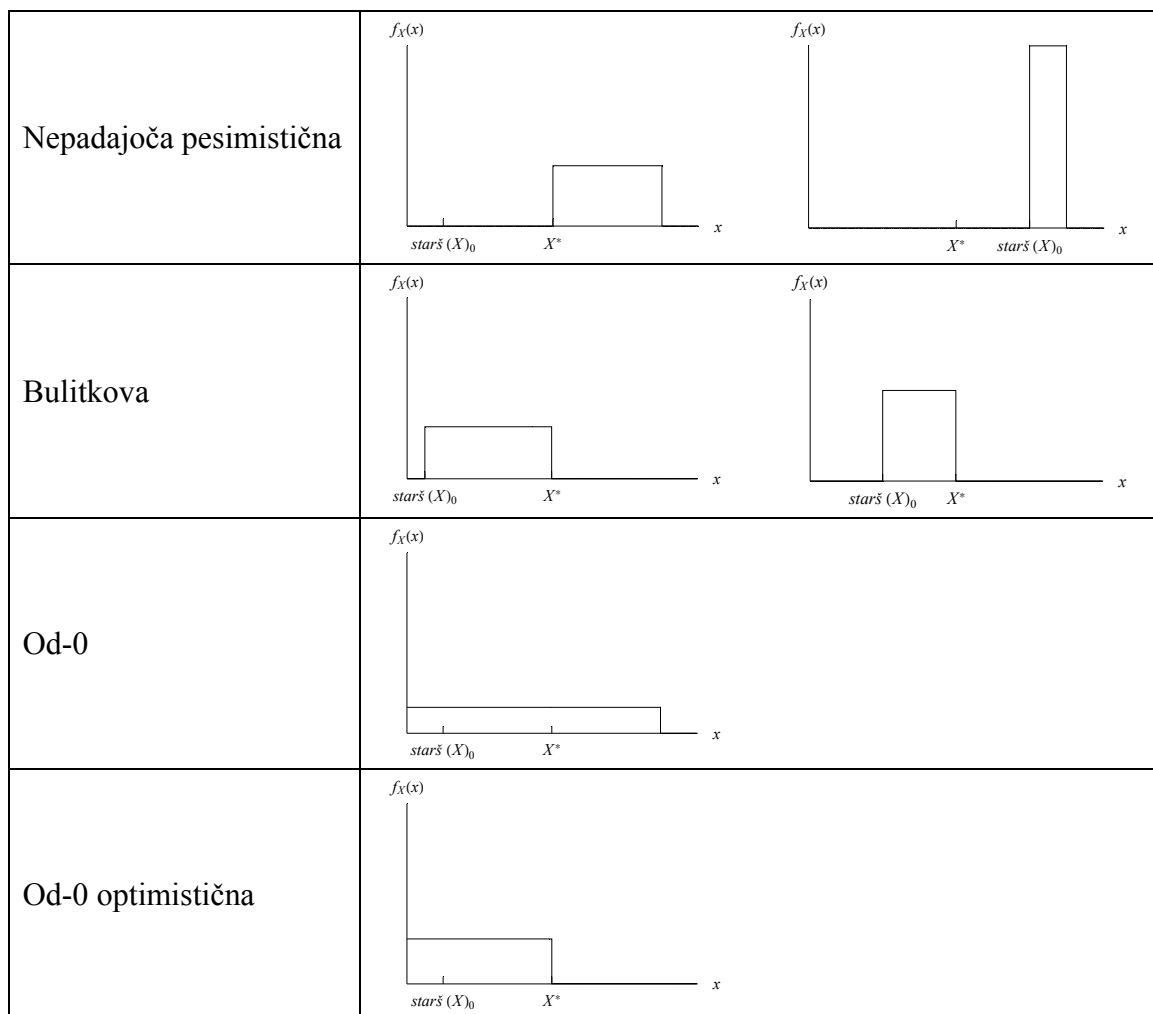
Na sliki 55 vidimo, da lastnost 1 in 2 patologijo povzročata tudi pri večjih preiskovalnih drevesih. Učinek lastnosti 1 je manjši, a vedno prisoten.

6.1.3. Vpliv hevristične ocenjevalne funkcije na patologijo

Vpliv hevristične ocenjevalne funkcije na patologijo je na nek način bolj zanimiv od vpliva narave problema, kajti problem je ponavadi dan in nanj ni mogoče vplivati, ocenjevalno funkcijo pa izberemo sami in se tako patologiji morda lahko ognemo. Ker izhajamo iz enakomerno porazdeljene Bulitkove ocenjevalne funkcije, se bomo v disertaciji omejili na enakomerno porazdeljene funkcije. Naredili smo sicer tudi nekaj poizkusov z normalno porazdeljenimi, ki pa glavnih ugotovitev tega razdelka niso spremenili.

Ključni vrednosti za hevristično ocenjevalno funkcijo v vozlišču x sta prava vrednost tega vozlišča X^* in statična hevristična vrednost starša x , ki jo bomo označili s $starš(X)_0$. Ocenjevalne funkcije, ki vračajo hevristične vrednosti $\leq X^*$, so popolne, mi pa jim bomo rekli optimistične, da jih bomo razlikovali od pesimističnih, ki vračajo vrednosti $\geq X^*$. Ocenjevalne funkcije, ki vračajo vrednosti $\geq starš(X)_0$, so monotono nepadajoče ali krajše nepadajoče. Bulitkova ocenjevalna funkcija, ki je enakomerno porazdeljena na intervalu $[starš(X)_0, X^*]$, je poseben primer optimistične nepadajoče ocenjevalne funkcije. Ocenjevalno funkcijo, ki vrača vrednosti ≥ 0 , bomo označili z od-0. Razpredelnica 4 kaže gostote porazdelitev vseh ocenjevalnih funkcij, ki jih bomo preučevali; za večjo nazornost jih je večina predstavljena s po dvema primeroma.

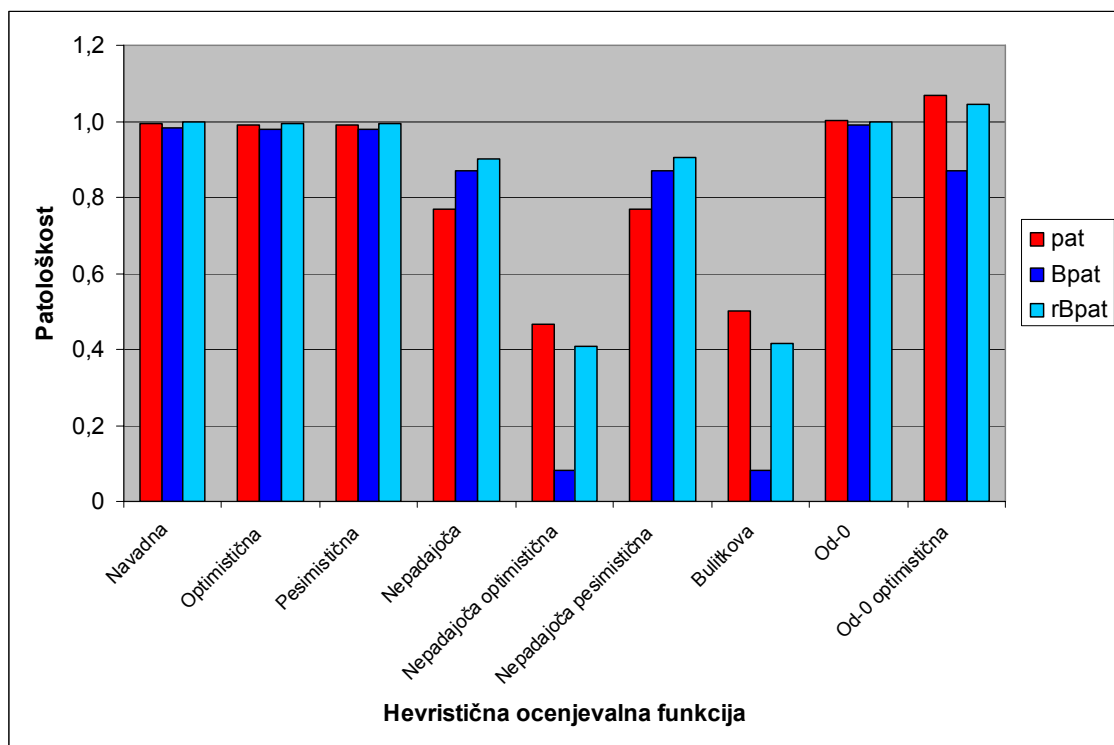
Ime	Primeri	
Navadna		
Optimistična		
Pesimistična		
Nepadajoča		
Nepadajoča optimistična		



Razpredelnica 4. Gostote porazdelitev hevrističnih ocenjevalnih funkcij, ki jih bomo preučevali

Različne hevristične ocenjevalne funkcije delajo različno veliko RV napako poteze, zaradi česar $Bpat$ ni najprimernejša mera patološkosti za njihovo primerjavo. Zamislimo si ocenjevalno funkcijo, ki pri večini preiskovalnih dreves ne naredi napake pri nobeni globini preiskovanja, pri nekaj drevesih pa jo naredi le pri največji globini. Tako ocenjevalno funkcijo bi morali označiti za povsem patološko, saj je z njo preiskovanje do večje globine vedno škodljivo, vendar je mera $Bpat$ ne. Ustreznejša mera bi bila taka, ki bi povedala, ali preiskovanje do večje globine škodi večkrat kot koristi. V ta namen bomo uvedli relativno patološkost po Bulitku $rBpat$, ki je količnik med verjetnostjo, da je drevo patološko (to je $BPat$), in verjetnostjo, da v drevesu globlje preiskovanje koristi. Slednja je po zgledu $BPat$ definirana kot verjetnost, da v preiskovalnem drevesu za vsaj en par sosednjih globin preiskovanja d in $d + 1 \leq d_{\max}$ velja $RVME_{0,d} > RVME_{0,d+1}$.

Slika 56 kaže vse tri mere patološkosti pat , $Bpat$ in $rBpat$ za hevristične ocenjevalne funkcije iz razpredelnice 4; $b = 2$, $d_{\max} = 10$ in standardni odklon navadne enakomerno porazdeljene ocenjevalne funkcije je 0,1, ostale pa so iz nje izpeljane tako, kot kažejo primeri v razpredelnici.



Slika 56. Patološkost hevrističnih ocenjevalnih funkcije iz razpredelnice 4

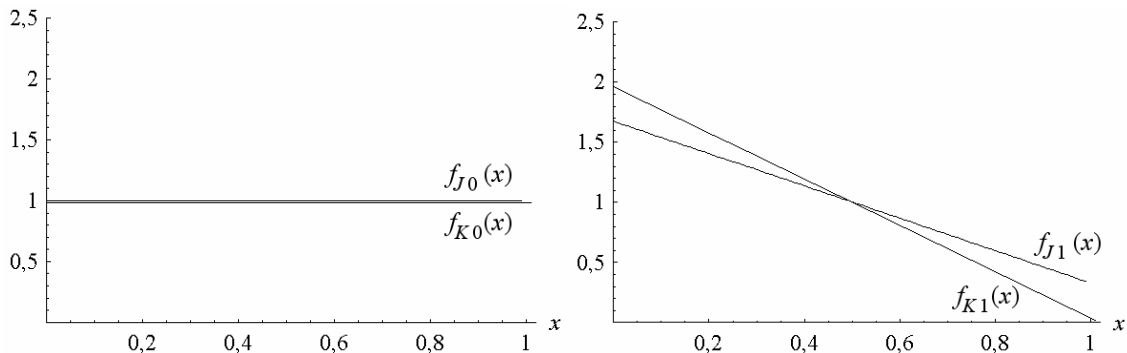
Na podlagi slike 56 pridemo do dveh glavnih ugotovitev:

1. Če naj bo globlje preiskovanje zares koristno, potrebujemo monotono nepadajočo hevristično ocenjevalno funkcijo. Pri ostalih je napaka poteze pri vseh globinah preiskovanja približno enaka, od-0 pa je celo patološka – tako po meri *pat* (napaka v korenu preiskovalnega drevesa se z večanjem globino preiskovanja v povprečju veča), kot po meri *rBpat* (povečanje globine preiskovanja škodi večkrat kot koristi).
2. Če je ocenjevalna funkcija nepadajoča, je koristno, da je poleg tega optimistična, sicer pa optimističnost nima znatnega vpliva.

Za drugo ugotovitev žal nimamo pojasnila, ker pri drevesih višine 2, ki so primerna za preučevanje vzrokov za patologijo, ne velja – tam je patološkost vseh nepadajočih ocenjevalnih funkcij zelo podobna. Na sliki tudi vidimo, da so si vse tri mere patološkosti blizu; edina večja izjema sta obe nepadajoči optimistični ocenjevalni funkciji. Do izjeme pride, ker ti dve ocenjevalni funkciji zelo redko naredita napako, tako da globlje preiskovanje z njima pogosto ni koristno, ker se pri vseh globinah odločita pravilno; zaradi tega relativna patološkost po Bulitku ne more biti tako nizka kot absolutna, mera *pat* pa tako ali tako ni neposredno povezana z *Bpat*. Nenavadno je, da sta se za najboljši izkazali optimistični preiskovalni funkciji, saj sta Sadikov in Bratko [56, 57] nedavno pokazala, da se v delnih preiskovalnih algoritmih bolje obnesejo pesimistične – za to nimamo pojasnila.

Razložimo zdaj, **zakaj so monotono nepadajoče hevristične ocenjevalne funkcije manj patološke**. Za to bomo uporabili znano preiskovalno drevo s slike 48. Primerjali bomo Bulitkovo ocenjevalno funkcijo, za katero smo razloge za patologijo razložili ob slikah 49 in 53, ter najbolj patološko od-0 optimistično ocenjevalno funkcijo. V drevesu, ki smo si ga izbrali za primer, sta patološki sicer obe, a od-0 optimistična bolj: zanjo velja $RVME_{0,1} = 0,490$ in $RVME_{0,2} = 0,547$, za Bulitkovo pa $RVME^B_{0,1} = 0,461$ in

$RVME_{0,2}^B = 0,486$. Slika 57 kaže gostoti porazdelitev hevrističnih vrednosti J in K v preiskovalnem drevesu na sliki 48: na levi strani pri preiskovanju do globine 1, na desni strani pa pri preiskovanju do globine 2. Vrednosti J_0 in K_0 sta povprečeni po vseh možnih vrednostih I_0 , J_1 in K_1 pa tudi po vseh možnih vrednostih J_0 in K_0 .



Slika 57. Razlaga, zakaj so monotono nepadajoče hevristične ocenjevalne funkcije manj patološke

Da bomo razumeli, zakaj je od-0 optimistična ocenjevalna funkcija bolj patološka od Bulitkove, moramo primerjati desni strani slik 57 in 49. Vemo, da na sliki 49 do patologije pride, ker se pri povečanju globine preiskovanja z 1 na 2 K poveča manj kot J in je zato K_1 bližje J_1 kot $K_0 J_0$. Na sliki 57 se sicer pri povečanju globine preiskovanja J in K zmanjšata ($f_{J_1}(x)$ in $f_{K_1}(x)$ imata večje vrednosti pri manjših x), se pa K zmanjša bolj kot J , kar učinkuje podobno kot njegovo manjše povečanje na sliki 49. Vprašanje, na katerega moramo odgovoriti, je, zakaj je učinek na sliki 57 močnejši. Odgovor tiči prav v tem, da se obe hevristični vrednosti zmanjšata namesto povečata. Interval, ki najučinkoviteje preprečuje RV napako poteze, je namreč med $J^* = 1$ in $K^* = 1,02$, saj če je $K > J^*$, do napake sploh ne more priti. Na sliki 49 se pomen tega intervala s povečanjem globine preiskovanja poveča, ker na njem leži več vrednosti ($f_{K_1}(x)$ je tam večja), na sliki 57 pa zmanjša, ker na njem leži manj vrednosti ($f_{K_1}(x)$ je tam manjša). To je tisto, kar povzroči, da je od-0 optimistična ocenjevalna funkcija bolj patološka od Bulitkove.

6.2. Patologija pri iskanju poti

Iskanje poti po prostoru je pogost problem: pojavlja se v robotiki, iskanju poti po zemljevidih in še kje, mi pa smo ga preučevali na primeru računalniških iger. Računalniške igre dandanes ne uporabljajo delnih preiskovalnih algoritmov, a ker bi polni algoritmi vzeli preveč časa, si morajo programerji pomagati z raznoterimi zvijačami, kot so vnaprej določene poti in oporne točke. Problem je še posebej pereč v strateških igrah, kjer igralec pogosto naenkrat ukaže premik velikemu številu enot. Pred leti je iskanje poti v nekaterih igrah porabilo kar 60–70 % časa namenjenega umetni inteligenci [53]; danes so procesorji sicer hitrejši, a tudi zemljevidi so večji. Spričo vedno močnejše težnje k realizmu v igrah se v zadnjem času pojavlja želja po uporabi delnih algoritmov, ker so najbolj 'pošteni', saj denimo enota pri iskanju poti v neznanem okolju dejansko lahko pregleda le svojo okolico, nato pa se na podlagi te odloči za premik [13].

6.2.1. Opis problema

V tem podpoglavju se bomo ukvarjali z agentom, ki išče pot iz začetnega v končno stanje po zemljevidu, sestavljenem iz kvadratov, od katerih so nekateri prehodni, drugi pa ne. Množico stanj S , v katerih je agent lahko, sestavljajo vsi prehodni kvadrati; s_g je končno stanje. Premiki navzgor, navzdol, levo in desno so dolgi 1, premiki po diagonalah pa $\sqrt{2}$. Preiskovalni problem je določen z zemljevidom ter začetnim in končnim stanjem.

Agent išče pot z algoritmom LRTS (learning real-time search) [14], nastavljenim tako, da deluje podobno kot klasični LRTA* [27]. LRTS preišče prostor okrog trenutnega stanja $s_t \in S$ do globine d , torej do d premikov od s_t . Stanja na robu preiskanega območja oceni s hevristično ocenjevalno funkcijo f . Najboljše robno stanje je $s_{r \text{ opt}} \in S$, za katerega velja, da je vsota razdalje od s_t do $s_{r \text{ opt}}$ in ocene razdalje od $s_{r \text{ opt}}$ do s_g , kar zapišemo kot $f(s_{r \text{ opt}}) = g(s_{r \text{ opt}}) + h(s_{r \text{ opt}})$, najmanjša. Agent se nato premakne do stanja $s_{r \text{ opt}}$, kjer preiskovanje ponovi. Postopek ponavlja, dokler ne doseže s_g . Na začetku iskanja poti je ocena razdalje od vsakega stanja do s_g enaka razdalji po praznem zemljevidu, torej takem, kje so vsi kvadrati prehodni (ta razdalja ni nič drugega kot razširitev manhattanske razdalje [68] z diagonalnimi premiki). Po vsakem preiskovanju pa se ocena $h(s_t)$ popravi na $f(s_{r \text{ opt}})$, kadar je slednja večja, kar zviša oceno na področjih, kjer je bila na začetku preveč optimistična, in omogoči, da agent sčasoma najde pot okrog ovir, ki jih sicer ne bi znal obiti. Temu popravljanju ocen rečemo učenje. Hevristična ocenjevalna funkcija s popravljenimi ocenami je še vedno popolna, ni pa več nujno monotono neopadajoča.

Najbolj naravno merilo uspešnosti iskanja poti od stanja s do stanja s_g pri globini preiskovanja d je dolžina najdene poti $l_d(s)$. Stopnjo *patologije dolžine poti* (angl. solution-length pathology) definiramo kot število parov sosednjih globin preiskovanja d in $d + 1 \leq d_{\max}$, za katere velja $l_d(s) < l_{d+1}(s)$. $Bpat^l(n)$ je verjetnost, da se v preiskovalnem problemu pojavi patologija dolžine poti stopnje n ; $Bpat^l(0)$ je verjetnost, da problem ni patološki. Zaradi skladnosti s preostankom disertacije in za ugotavljanje patološkosti množic stanj, ki ne tvorijo poti, smo merili tudi *patologijo (RV) napake poteze* (angl. error pathology), za kar smo uporabili mero patološkosti $Bpat$, opisano v razdelku 6.1.1. Nismo pa v poizkusih, opisanih v tem podpoglavju, merili patologije na način, ki smo ga uporabljali pri minimaksu – kot povprečne spremembe napake poteze v korenu pri povečanju globine preiskovanja (kar izraža mera *pat*). Glavni razlog za to je, da tovrstne patologije pri iskanju poti povečini nismo opazili.

V nadaljevanju bomo potrebovali še dve meri, ki opisujeta delovanje algoritma LRTS. Naj bo $\alpha(d)$ število stanj, ki jih algoritem pri globini preiskovanja d pregleda na en premik agenta. Z $\beta(d)$ pa bomo označili vsoto popravkov hevrističnih ocen, na katere algoritem pri globini preiskovanja d naleti v stanjih, ki jih pregleda na en premik agenta. Vsota popravkov hevrističnih ocen je vsota razlik med popravljenimi in izvirnimi hevrističnimi ocenami razdalj od pregledanih stanj do končnega.

6.2.2. Ugotavljanje patološkosti

V poizkusih v tem podpoglavju smo uporabili pet zemljevidov iz računalniških iger velikosti od 214×192 (2.765 stanj) do 235×204 (16.142 stanj). Na njih smo naključno tvorili 1,000 preiskovalnih problemov (200 na zemljevid), katerih prava razdalja od začetnega do končnega stanja je bila od 1 do 100. Kot v večini do sedaj opisanih

poizkusov smo globino preiskovanja omejili na $d_{\max} = 10$. Uporabili smo izvedbo algoritma LRTS v programu Hierarchical Open Graph [17, 64].

Izvajali smo dve vrsti poizkusov: *s potjo* (angl. on-policy) in *brez poti* (angl. off-policy). V poizkusih s potjo je agent iskal pot od začetnega do končnega stanja in se pri tem učil popravkov hevrističnih ocen. Merili smo patologijo dolžine poti in patologijo napake poteze. RV napako poteze smo za vsako globino preiskovanja povprečili po potezah v vseh stanjih na poti in nato iz teh napak za vsak preiskovalni problem izračunali patološkost. V poizkusih brez poti pa smo agenta postavili v več stanj, od katerih je v vsakem izbral prvo potezo proti končnemu stanju. Učenja tu nismo uporabljali, ker bi to težko storili na smiseln način. Za primerljivost s poizkusi s potjo smo namesto računanja patologije v posamičnih stanjih napako poteze večinoma povprečili po množici stanj in patologijo izračunali iz povprečnih napak. Kadar smo stanja v množici izbirali naključno, smo jih izbrali po 188, ker jih je toliko v povprečju na problem agent obiskal v poizkusih s potjo.

Prvi poizkus je preprost poizkus s potjo na naših 1,000 preiskovalnih problemih. Razpredelnica 5 kaže odstotke problemov s patologijo dolžine poti in napake poteze; $d_{\max} = 10$.

Stopnja patologije n	0	1	2	3	4	≥ 5
<i>Bpat</i> (n) [%]	38,1	12,8	18,2	16,1	9,5	5,3
<i>Bpat</i> (n) [%]	38,5	15,1	20,3	17,0	7,6	1,5

Razpredelnica 5. Odstotki patoloških problemov v prvem poizkusu s potjo

V razpredelnici 5 vidimo, da je patoloških več kot 60 % problemov, kar se zdi veliko. Prva razlaga, ki se ponudi, je, da naši zemljevidi vsebujejo veliko stanj, kjer so okoliške ovire razporejene tako, da preiskovanje zavedejo v patologijo. Vendar je poizkus brez poti na končnih stanjih iz naših problemov in vseh ostalih stanjih kot začetnih dal nepričakovan rezultat, da je patoloških le 3,9 % stanj. A kot smo ugotovili, primerjati patološkost posamičnih stanj s patološkostjo množic stanj, kar smo storili v poizkusu s potjo, ni čisto pošteno. Zaradi tega smo poizkus brez poti ponovili z množicami 188 naključno izbranih začetnih stanj. Razpredelnica 6 kaže odstotke problemov s patologijo napake poteze v tem poizkusu; $d_{\max} = 10$.

Stopnja patologije n	0	1	2	3	4	≥ 5
<i>Bpat</i> (n) [%]	57,8	31,4	9,4	1,4	0,0	0,0

Razpredelnica 6. Odstotki problemov s patologijo napake poteze v poizkusu brez poti na množicah 188 začetnih stanj

V razpredelnici 6 vidimo, da bolj pošteno merjenje patologije v poizkusu brez poti delež patoloških primerov s 3,9 % dvigne na 42,2 %. To je še vedno manj kot 61,5 % v poizkusu s potjo (razpredelnica 5), a razlika ni več tako dramatična kot pri merjenju patološkosti posamičnih stanj.

Opažanje, da je le 3,9 % posamičnih stanj patoloških, napeljuje na misel, da je patologija v poizkusu z množicami 188 začetnih stanj posledica zelo majhnih razlik med napakami poteze pri različnih globinah preiskovanja. Take razlike bi lažje šteli za naključen šum kot za sistematično povečevanje napake z globino. Zato definicijo *Bpat* razširimo s koeficientom strpnosti do majhnih povečanj napake poteze t : *Bpat_t* (n) je

verjetnost, da za n parov sosednjih globin preiskovanja d in $d + 1 \leq d_{\max}$ velja $t RVME_{0,d} < RVME_{0,d+1}$. Razpredelnica 7 kaže odstotke problemov s patologijo napake poteze po razširjeni definiciji patološkosti v poizkusih s potjo in brez poti (na množicah 188 začetnih stanj); $d_{\max} = 10$ in $t = 1,09$. Vrednost $t = 1,09$ smo izbrali tako, da je delež patoloških problemov v poizkusu brez poti manjši od 5 %.

Stopnja patologije n	0	1	2	3	4	≥ 5
$Bpat_{1,09}(n)$ [%] s potjo	42,3	19,7	21,2	12,9	2,6	0,3
$Bpat_{1,09}(n)$ [%] brez poti	95,7	3,7	0,6	0,0	0,0	0,0

Razpredelnica 7. Odstotki problemov s patologijo napake poteze v poizkusih s potjo in brez poti na množicah 188 začetnih stanj po razširjeni definiciji patološkosti pri $t = 1,09$

V razpredelnici 7 vidimo, da je vpliv koeficienta t na patologijo v poizkusu s potjo precej majhen (primerjava z razpredelnico 5) in da je torej v poizkusu s potjo patologije še vedno veliko. Da je v poizkusu brez poti patologije malo, pa kaže, da sam zemljevid ni pomemben povzročitelj patologije in da je torej razloge zanjo treba iskati pri preiskovalnem algoritmu. Te razloge bomo preučili v naslednjem razdelku. Poizkusa v razpredelnici 7 bomo odslej imenovali *osnovni poizkus s potjo* in *osnovni poizkus brez poti*.

6.2.3. Razlogi za patologijo

Prvi razlog za patologijo, ki se ponuja, je, da algoritem LRTS agenta usmerja v stanja, kjer je patologija bolj verjetna. Preverimo ga lahko s poizkusom brez poti, kjer RV napako poteze za vsak problem izmerimo v tistih stanjih, ki jih agent obišče v osnovnem poizkusu s potjo pri katerikoli globini preiskovanja. Tak poizkus izmeri patološkost golih stanj, saj se za razliko od poizkusa s potjo patologija pri vseh globinah preiskovanja meri v istih stanjih, učenje pa se ne upošteva. Odstotke problemov s patologijo napake poteze v tem poizkusu kaže razpredelnica 8; $d_{\max} = 10$ in $t = 1,09$.

Stopnja patologije n	0	1	2	3	4	≥ 5
$Bpat_{1,09}(n)$ [%]	93,6	5,3	0,9	0,2	0,0	0,0

Razpredelnica 8. Odstotki problemov s patologijo napake poteze v poizkusu brez poti na stanjih obiskanih v osnovnem poizkusu s potjo

V razpredelnici 8 vidimo, da je patologije sicer več kot v osnovnem poizkusu brez poti (6,3 % proti 4,3 %), a bistveno manj kot v osnovnem poizkusu s potjo (6,3 % proti 57,7 %); rezultati poizkusov, s katerima primerjamo, so v razpredelnici 7. Iz tega lahko sklepamo, da prvi razlog za patologijo do neke mere sicer drži, a da morajo obstajati še pomembnejši razlogi.

Vemo, da se v poizkusih s potjo LRTS uči popravkov hevrističnih ocen, v poizkusih brez poti pa učenja ni. Učenje bi torej lahko bilo razlog, zakaj je v prvem primeru patologije več. Zamislimo si agenta, ki se premika po praznem zemljevidu ter vsakih d korakov opravi preiskovanje okolice in popravi hevristično oceno. Pri vsakem preiskovanju naleti na natanko eno stanje s popravljenno oceno – tisto, v katerem jo je popravil pri prejšnjem preiskovanju. Ker pri vsakem preiskovanju pregleda $(2d + 1)^2$ različnih stanj, jih ima popravljenno oceno $1 / (2d + 1)^2$. Ta delež je večji pri manjših d ,

kar nas privede do **drugega razloga** za patologijo: pri manjših globinah preiskovanja je korist od učenja večja. To pomeni, da vračajo boljše poteze, kot bi bilo sklepati iz same globine, in so zato bližje večjim globinam. Če so si različne globine preiskovanja blizu, pa so patološki primeri, da se manjša obnese bolje od večje, pogostejši.

Drugi razlog za patologijo preverimo tako, da v osnovnem poizkusu s potjo, kjer se učenje uporablja (saj brez njega agent pri večini problemov sploh ne bi dosegel končnega stanja), napako in posledično patologijo merimo, ne da bi upoštevali naučene popravke hevrističnih ocen. To naredimo tako, da v vsakem stanju izberemo dve potezi: prvo, ki uporablja popravljene hevristične ocene in jo agent uporabi za premik, ter drugo, ki uporablja izvirne hevristične ocene in je namenjena zgolj merjenju napake. Odstotke problemov s patologijo napake poteze v tem poizkusu kaže razpredelnica 9; $d_{\max} = 10$ in $t = 1,09$.

Stopnja patologije n	0	1	2	3	4	≥ 5
$Bpat_{1,09}(n)$ [%]	79,8	14,2	4,5	1,2	0,3	0,0

Razpredelnica 9. Odstotki problemov s patologijo napake poteze v poizkusu s potjo, v katerem je patologija merjena brez upoštevanja naučenih popravkov hevrističnih ocen

Razpredelnica 9 potrjuje, da učenje povzroča patologijo, saj neupoštevanje naučenih popravkov hevrističnih ocen patološkost s 57,7 % izmerjenih v osnovnem poizkusu s potjo (razpredelnica 7) zmanjša na 20,2 %. Ne more pa biti učenje edini razlog, saj je patologije še vedno več od 4,3 % v osnovnem poizkusu brez poti (tudi razpredelnica 7) – k temu dodatnemu razlogu se bomo še vrnil.

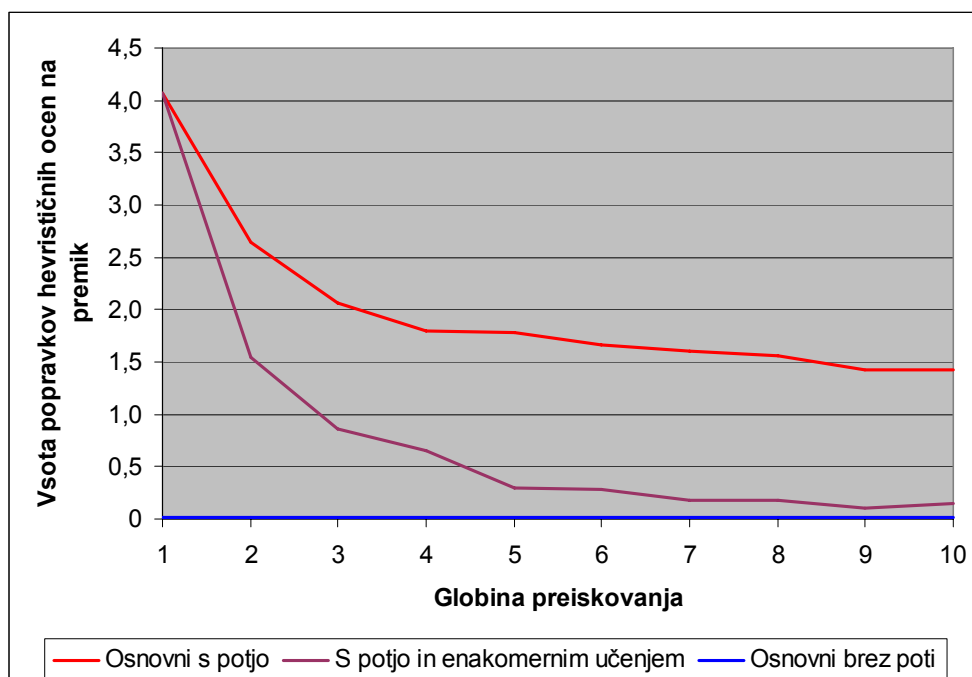
V poizkusih brez poti so glede učenja vse globine preiskovanja enakovredne, saj tam učenja pač ni. V poizkusih s potjo pa je učenje nujno, zato globine preiskovanja lahko poizkusimo izenačiti tako, da v vseh stanjih znotraj preiskanega območja hevristične ocene popravimo kolikor je mogoče enako – takemu učenju bomo rekli *enakomerno učenje* (angl. uniform learning). Naj bo s_t stanje, v katerem je agent trenutno, S_n množica stanj znotraj preiskanega območja in S_r množica stanj na robu tega območja. Enakomerno učenje za vsako stanje $s \in S_n$ požene LRTS, ki preiskovanje začne v s in konča v stanjih S_r , hevristično oceno s pa popravi na hevristično oceno najkrajše najdene poti od s do končnega stanja – kot običajno učenje stori za s_t . Razpredelnica 10 kaže odstotke problemov s patologijo napake poteze v poizkusu s potjo in enakomernim učenjem; $d_{\max} = 10$ in $t = 1,09$.

Stopnja patologije n	0	1	2	3	4	≥ 5
$Bpat_{1,09}(n)$ [%]	40,9	20,2	22,1	12,3	4,5	0,0

Razpredelnica 10. Odstotki problemov s patologijo napake poteze v poizkusu s potjo in enakomernim učenjem

Videti je, da rezultati v razpredelnici 10 drugi razlagi patologije nasprotujejo, saj kažejo 59,1 % patoloških problemov, kar je več od 57,7 % v osnovnem poizkusu s potjo (razpredelnica 7). A če si ogledamo, na koliko popravljenih hevrističnih ocen LRTS pri različnih globinah preiskovanja naleti, ugotovimo, da poizkus z enakomernim učenjem razlago vendarle potrjuje. Slika 58 kaže vsoto popravkov hevrističnih ocen na premik agenta $\beta(d)$ v odvisnosti od globine preiskovanja d v poizkusu s potjo in enakomernim

učenjem, osnovnem poizkusu s potjo ter osnovnem poizkusu brez poti; $d_{\max} = 10$ in $t = 1,09$.



Slika 58. Vsota popravkov hevrističnih ocen, na katere algoritem naleti na premik agenta, v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih poizkusih

Kot vidimo na sliki 58, LRTS v obeh poizkusih s potjo pri majhnih globinah preiskovanja naleti na več popravkov hevrističnih ocen kot pri večjih. Zaradi tega lahko domnevamo, da je korist od učenja pri manjših globinah večja, kar potrjuje drugo razlago za patologijo. Razlika med večjimi in manjšimi globinami je pri enakomernem učenju večja kot pri običajnem, kar se sklada z večjo patološkostjo prvega. Je pa to, da LRTS pri enakomernem učenju naleti na manj popravkov hevrističnih ocen kot pri običajnem, presenetljivo, saj se pri enakomernem učenju popravi precej več hevrističnih ocen kot pri običajnem. Verjetna razlaga je, da agent pri enakomernem učenju redkeje obiskuje področja, kjer je že bil in kjer so hevristične ocene popravljene, saj so poti, ki jih najde, v povprečju kar 2,3-krat krajše kot pri običajnem učenju.

V razdelku 6.2.1 smo zapisali, da učenje povzroči, da hevristična ocenjevalna funkcija, ki jo uporabljamo pri iskanju poti, ni več nujno monotono nepadajoča. Vendar to za enakomerno učenje ne velja, saj nepadajočnost ohranja. Glede na to, da smo v razdelku 6.1.3 ugotovili, da je patologija pri nepadajočih ocenjevalnih funkcijah manjša, je nenavadno, da so to pri enakomernem učenju ne zgodi. Očitno nepadajočnost patologije ne zmanjša vedno.

Oglejmo si zdaj še **tretji razlog** za patologijo. Naj bosta $\alpha_s(d)$ in $\alpha_{\text{brez}}(d)$ števili stanj, ki jih LRTS pri globini preiskovanja d pregleda na premik agenta v osnovnem poizkusu s potjo in v osnovnem poizkusu brez poti. V poizkusu s potjo se preiskovanje izvede vsakih d premikov, v poizkusu brez poti pa vsak premik. Zato velja $\alpha_s(d) = \alpha_{\text{brez}}(d) / d$ (če je število prehodnih kvadratov na zemljevidu v obeh primerih enako), kar pomeni, da LRTS v poizkusu s potjo na premik pregleda manj stanj kot v poizkusu brez poti, sploh pri večjih globinah preiskovanja. To pomeni, da v poizkusu s potjo večje globine vračajo slabše poteze, kot bi bilo sklepati iz same globine, in so zato bližje manjšim

globinam. Že pri drugem razlogu za patologijo pa smo ugotovili, da če so si različne globine preiskovanja blizu, so patološki primeri, da se manjša obnese bolje od večje, pogostejši.

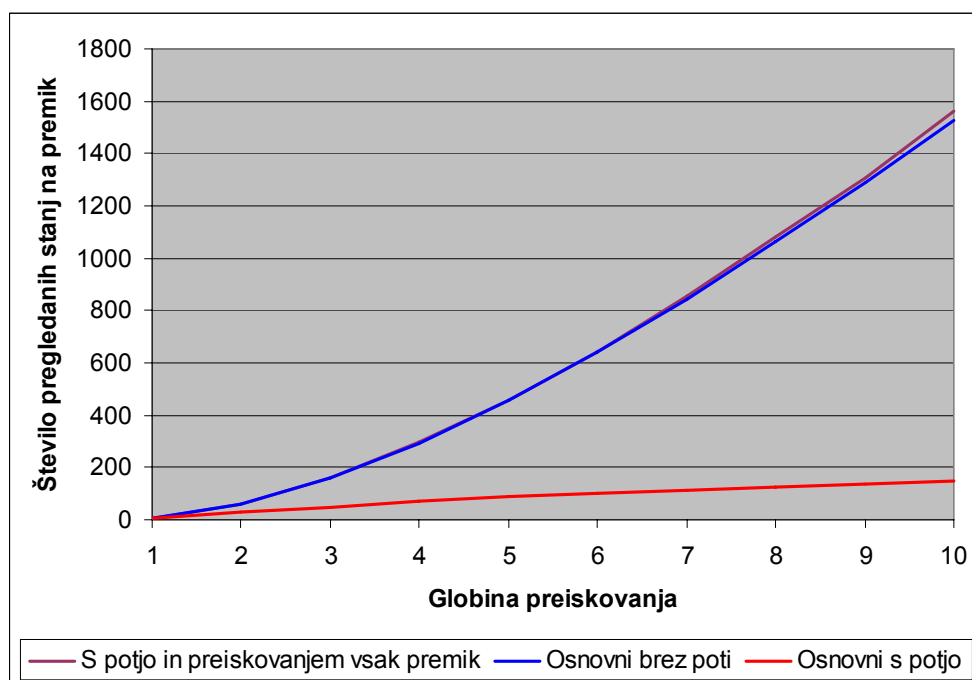
Tretji razlog za patologijo preverimo s poizkusom s potjo, kjer preiskovanje izvedemo vsak premik namesto vsakih d premikov (kot LRTS stori običajno). Razpredelnica 11 kaže odstotke problemov s patologijo napake poteze v tem poizkusu; $d_{\max} = 10$ in $t = 1,09$.

Stopnja patologije n	0	1	2	3	4	≥ 5
$B_{pat1,09}(n)$ [%]	86,9	9,0	3,3	0,6	0,2	0,0

Razpredelnica 11. Odstotki problemov s patologijo napake poteze v poizkusu s potjo, kjer preiskujemo vsak premik

Rezultati v razpredelnici 11 tretji razlog za patologijo odločno potrjujejo: patologije je le 13,1 %, kar je znatno manj od 57,7 % v osnovnem poizkusu s potjo (razpredelnica 7). Še vedno je več od 4,3 % v osnovnem poizkusu brez poti (tudi razpredelnica 7), a razliko lahko pripišemo prvima dvema razlogoma.

V dodatno podkrepitev tretjega razloga si na sliki 59 oglejmo število pregledanih stanj na premik $\alpha(d)$ v odvisnosti od globine preiskovanja d v poizkusu s potjo in iskanjem vsak premik, osnovnem poizkusu s potjo ter osnovnem poizkusu brez poti; $d_{\max} = 10$ in $t = 1,09$.



Slika 59. Število stanj, pregledanih na premik agenta, v odvisnosti od globine preiskovanja pri različnih poizkusih

Kot vidimo na sliki 59, sta si poizkus s potjo in preiskovanjem vsak premik ter osnovni poizkus brez poti glede števila pregledanih stanj zelo podobna, kar utemeljuje njuno podobnost glede patologije. Vidimo pa tudi, da v teh dveh poizkusih število stanj z globino preiskovanja narašča precej hitreje kot v osnovnem poizkusu s potjo. To

pomeni, da so globine druga od druge bolj oddaljene, kar razlaga manjšo patološkost teh dveh poizkusov v primerjavi z osnovnim poizkusom s potjo.

Omeniti je treba, da nekateri preiskovalni algoritmi tako ali tako preiskujejo vsak premik – med njimi je tudi LRTA* [27]. Seveda pa tako pogosto preiskovanje v primerjavi z LRTS na premik porabi d -krat več procesorskega časa, tako da imata oba načina svoje prednosti in slabosti, izbira pa je odvisna od problema, ki ga rešujemo.

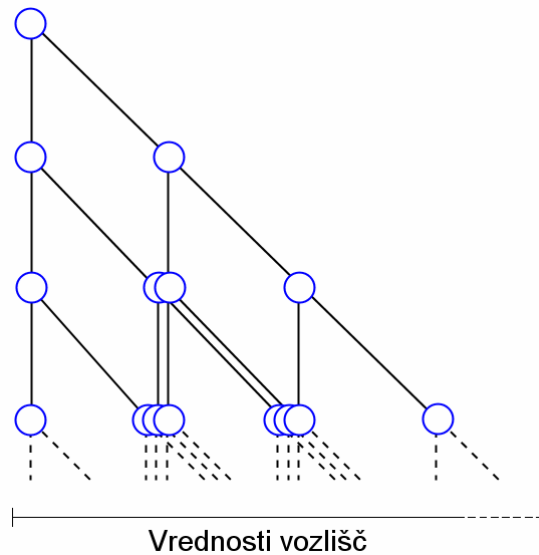
Razloge za patologijo pri iskanju poti lahko povzamemo z ugotovitvijo, da jo povzroča predvsem večja podobnost različnih globin preiskovanja, kot bi sklepali iz golih števil, zaradi česar so patološki primeri, da se manjša globina obnese bolje od večje, dokaj pogosti. To večjo podobnost pa povzročata učenje (drugi razlog za patologijo) in število pregledanih stanj na premik agenta (tretji razlog). Majhen vpliv ima še težnja algoritma LRTS, da agenta vodi v stanja, ki so sama po sebi nagnjena k patologiji (prvi razlog).

6.3. Zakaj je enoagentno preiskovanje koristno

Podobno kot večidel pri preiskovanju z minimaksom smo se tudi pri enoagentnem preiskovanju do zdaj ukvarjali predvsem s patologijo in razlogi zanjo. A glede na to, da enoagentno preiskovanje v glavnem vendarle deluje, se je smotno vprašati, zakaj je tako.

Pri igrah, ki jih imamo navadno v mislih, kadar govorimo o minimaksu, si ni težko predstavljati hevristične ocenjevalne funkcije, ki na podlagi danega stanja igre oceni, kakšne so naše možnosti za zmago. Če privzamemo, da nasprotnik igra popolno (kar navadno storimo), ima ocenjevalna funkcija vsaj pri igrah s popolno informacijo na voljo vse podatke, ki so za to oceno potrebni. Pri enoagentnem preiskovanju pa že v primeru iskanja poti, ki smo ga obravnavali v prejšnjem podpoglavju, ni tako: tam zemljevid izven preiskanega območja okrog agenta ni nujno poznan in hevristična ocenjevalna funkcija pravilne ocene sploh ne more dati. Zaradi tega lahko rečemo, da se globlje preiskovanje obnese bolje od plitvejšega zato, ker z njim pridobimo več podatkov za odločitev. Seveda to v vseh primerih ne drži: denimo pri reševanju uganke osmih ploščic ima ocenjevalna funkcija na voljo vse podatke o stanju uganke. A ne glede na to, ali ocenjevalni funkcijo so na voljo vsi podatki, potrebni za pravilno odločitev, jo lahko obravnavamo enako: kot funkcijo, ki za vozlišče v preiskovalnem drevesu vrne vrednost, ki ima glede na pravo neko napako. Ali je napaka posledica pomanjkanja podatkov ali tega, da ocenjevalna funkcija iz sicer zadostnih podatkov ne zna izračunati prave vrednosti, nas v tem podpoglavju ne bo zanimalo.

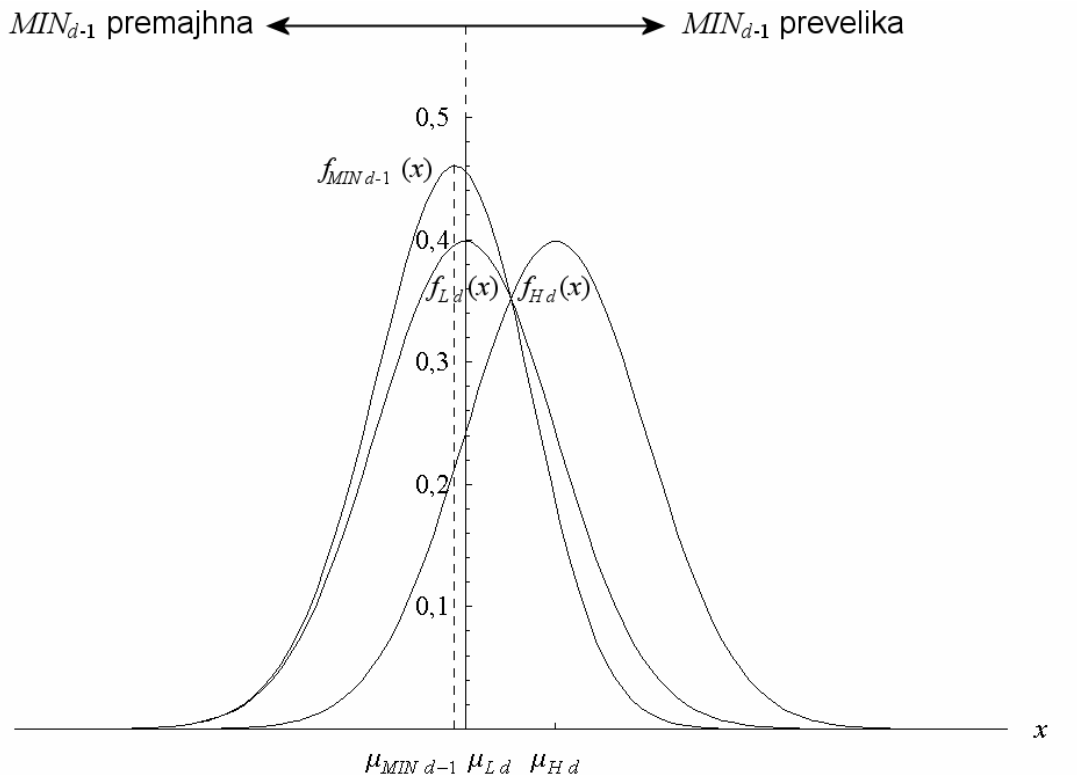
Razlago za delovanje enoagentnega preiskovanja bomo izpeljali na enak način, kot smo v podpoglavju 5.1 razlago za delovanje minimaksa. Uporabili bomo *enostavni model enoagentnega preiskovanja*, ki je enak enostavnemu modelu minimaksa, torej ima vejitev 2 in razliko med pravima vrednostma bratskih vozlišč povsod 1, le da so vsa njegova vozlišča vrste min. Prikazan je na sliki 60. Napako hevristične ocenjevalne funkcije bomo zopet ponazorili z normalno porazdeljenim šumom s standardnim odklonom 1.



Slika 60. Enostavni model enoagentnega preiskovanja

Hevristične vrednosti vozlišč v enostavnem modelu enoagentnega preiskovanja so porazdeljene podobno kot v enostavnem modelu minimaksa. Vozlišče na nivoju $i - 1$ enostavnega modela ima dva sinova, katerih hevristični vrednosti sta slučajni spremenljivki L_i (manjša) in H_i (večja) s srednjima vrednostma μ_{L_i} in μ_{H_i} . Statične hevristične vrednosti so porazdeljene normalno, gostoti porazdelitev statičnih hevrističnih vrednosti bratskih vozlišč pa sta podani z enačbama (29), ki veljata za enostavni model minimaksa. Hevristična vrednost vozlišča na nivoju $i - 1$ je slučajna spremenljivka $MIN_{i-1} = \min(L_i, H_i)$, gostota njene porazdelitve pa se izračuna z enačbo (31), ki je tudi znana iz enostavnega modela minimaksa. S tema dvema enačbama lahko rekurzivno izračunamo porazdelitev hevristične vrednosti na kateremkoli nivoju.

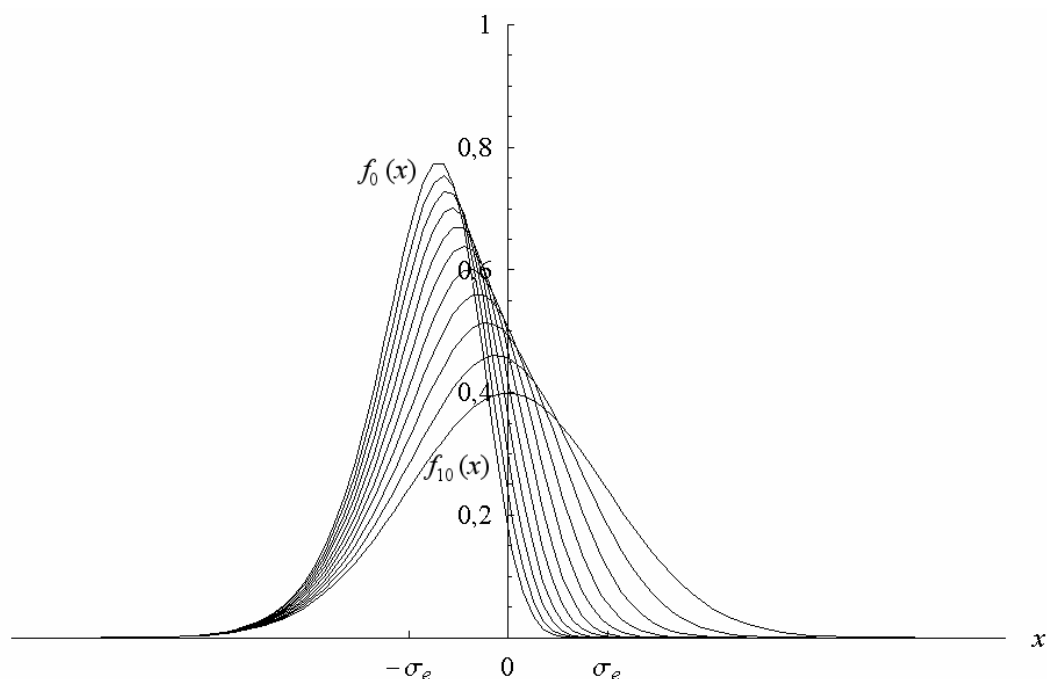
Sliki 40, ob kateri smo razložili razloge za delovanje preiskovanja z minimaksom, pri enoagentnem preiskovanju ustreza slika 61: na njej so prikazane gostote porazdelitev L_d , H_d in MIN_{d-1} .



Slika 61. Gostote porazdelitev statičnih hevrističnih vrednosti bratskih vozlišč in hevristične vrednosti njenega starša

Kot vidimo na sliki 61, je pri enoagentnem preiskovanju enako kot pri minimaksu vzpetina krivulje starša ($f_{MIN d-1}$) ožja od vzpetin krivulj njegovih sinov ($f_{L d}$ in $f_{H d}$) in da je posledično varianca hevristične vrednosti starša manjša. To pa – kot vemo – zmanjša RV napako poteze. Razlaga za zmanjšanje variance je enaka kot pri minimaksu. MIN_{i-1} je podobna L_i , kadar je prevelika, jo H_i lahko zmanjša, kadar je premajhna, pa jo H_i lahko naredi še manjšo. A ker je vpliv H_i v prvem primeru večji kot v drugem, pravilnosti svojega starša koristi bolj kot škodi.

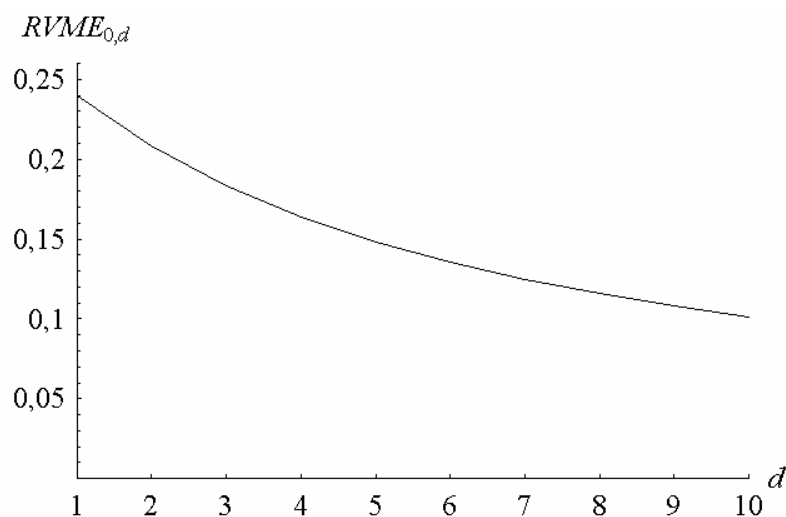
Sliki 41, kjer so prikazane gostote porazdelitev hevrističnih vrednosti za več nivojev pri minimaksu, pri enoagentnem preiskovanju ustreza slika 62: na njej vidimo gostote porazdelitev hevrističnih vrednosti za vse nivoje pri $d = 10$; izmed več porazdelitev na vsakem nivoju je izbrana tista, pri kateri je prava vrednost 0.



Slika 62. Gostote porazdelitev hevrističnih vrednosti za deset nivojev, začenši s statičnimi vrednostmi

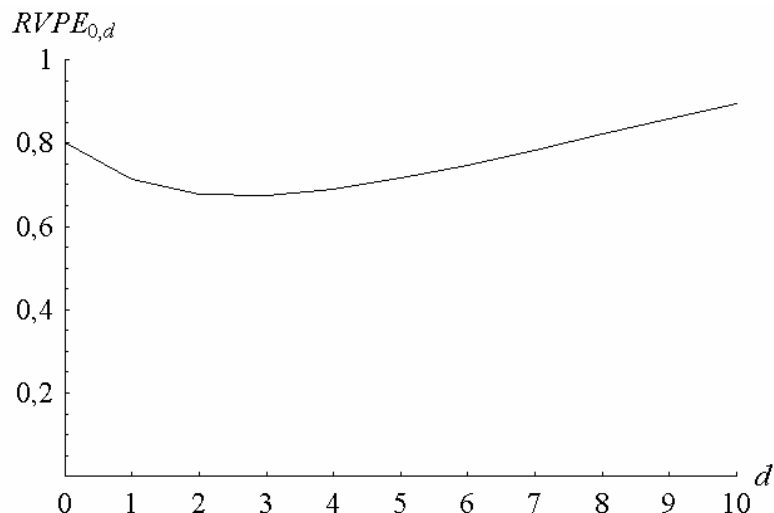
Kot vidimo na sliki 62, se vzpetine krivulj gostot porazdelitev hevrističnih vrednosti proti vrhu preiskovalnega drevesa ožijo, kar pomeni, da se varianca hevrističnih vrednosti manjša. Iz tega sledi, da se z globino preiskovanja manjša tudi varianca hevrističnih vrednosti v korenu in posledično RV napaka poteze. Patologije napake poteze torej ni pričakovati. Ker se v nasprotju z minimaksom hevristična vrednost v korenu od prave vedno bolj odmika, pa lahko pričakujemo patologijo napake položaja.

RV napaka poteze in položaja se izračunata enako kot pri minimaksu: z enačbama (32) in (33). Slika 63 kaže RV napako poteze v korenu ($RVME_{0,d}$) v odvisnosti od globine preiskovanja (d); $d_{\max} = 10$.



Slika 63. RV napaka poteze v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja

Kot vidimo na sliki 63, RV napaka poteze res ni patološka – slika je precej podobna sliki 42 za minimaks. Slika 64 pa kaže RV napako položaja v korenu ($RVPE_{0,d}$) v odvisnosti od globine preiskovanja (d); $d_{\max} = 10$.



Slika 64. RV napaka položaja v korenu v odvisnosti od globine preiskovanja

Kot vidimo na sliki 64, pri manjših globinah preiskovanja RV napaka položaja ni patološka, ker se heuristična vrednost od prave ne oddalji dovolj, pri večjih globinah pa se patologija po pričakovanju pojavi. Vendar to ni problematično, saj vemo, da pri enoagentnem preiskovanju k točni oceni položaja navadno niti ne težimo, ker popolne heuristične ocenjevalne funkcije pravo vrednost namenoma podcenjujejo.

Enostavni model enoagentnega preiskovanja bi lahko posplošili enako, kot smo posplošili enostavni model minimaksa v podpoglavju 5.2. Podobnost razlage delovanja enoagentnega preiskovanja z razlago delovanja minimaksa pa nam pove, da bi v vseh točkah prišli do enakih ugotovitev: pri vejitvi, standardnem odklonu statičnega šuma in razliki med pravimi vrednostmi bratskih vozlišč.

7. Sklep

7.1. Patologija minimaksa

Patologija minimaksa je burila duhove raziskovalcev več kot četrto stoletje in od njenega odkritja se je nabralo precej pojasnil, zakaj do nje pride in zakaj je v igrah ni opaziti. Kljub temu pa je nekaj vprašanj ostalo nerazčiščenih in nanja smo si v disertaciji prizadevali odgovoriti. To nam je v precejšnji meri tudi uspelo.

Zgodnji modeli preiskovanja z minimaksom, na kakršnih je bila patologija odkrita, so uporabljali dve pravi vrednosti položaja in pogosto tudi dve hevristični. To se na prvi pogled zdi realistično, a mi smo utemeljili, da je potrebnih več pravih in posledično tudi več hevrističnih vrednosti, ter smo nato v svojih raziskavah uporabljali realnovrednostni model minimaksa. Pokazali smo, da so realne vrednosti položajev in hevristična ocenjevalna funkcija, ki jim pri vseh globinah preiskovanja doda enak statičen šum, dovolj za odpravo patologije, tudi če realne vrednosti pretovorimo v dvojiške in opazujemo dvovrednostno napako. Razlog za to je, da so na nižjih nivojih drevesa igre zelo majhne in zelo velike vrednosti pogostejše kot na višjih. To ima za posledico, da je na nižjih nivojih dvovrednostna napaka manjša, kar pomeni, da je manjša tudi statična napaka pri preiskovanju do večjih globin, kar odpravlja patologijo. Za hevristične vrednosti sta do zelo podobnega razmišljanja že pred nami prišla Scheucher in Kaindle [61], vendar sta – podobno kot večina ostalih razlagalcev patologije – vztrajala, da je odvisnost med bližnjimi vrednostmi v drevesu igre vseeno potrebna. Naša razlaga je enostavnejša, ker tega ne zahteva, in jasnejša, ker smo v nasprotju s Scheucherjem in Kaindlom uporabili realne prave vrednosti položajev. Poleg tega smo jo potrdili z matematičnim dokazom.

Kot rečeno, je preteklo delo na področju patologije minimaksa dalo množico modelov, ki so uporabljali različna števila pravih in hevrističnih vrednosti položajev. Večina raziskovalcev številu vrednosti ni posvečala velike pozornosti, tisti, ki so jo, pa pomembnega vpliva na patologijo v glavnem niso opazili. Poleg tega so se v raziskavah pojavljale različne oblike podobnosti med bližnjimi vrednostmi v drevesu igre in različne vejitve drevesa. Za podobnost je bilo dostikrat ugotovljeno, da patologijo preprečuje, za veliko vejitev pa so nekateri raziskovalci opazili, da jo spodbuja, a večina se z njo ni dosti ukvarjala. Mi smo sistematično analizirali vse tri dejavnike. Najprej smo pokazali, kako se model minimaksa z neodvisnimi vrednostmi položajev z zmanjševanjem števila vrednosti iz nepatološkega postopoma spremeni v patološkega. Nato smo uvedli odvisen model, katerega realističnost smo potrdili s primerjavo s šahovskim programom. Tudi v tem modelu smo ugotovili, da majhno število vrednosti lahko povzroči patologijo, le da je bilo za odpravo patologije vedno dovolj že pet različnih vrednosti. V obeh modelih smo preučili vpliv vejitve in ugotovili, da pri neodvisnem vejitev patologijo močno spodbuja, pri odvisnem pa je njen učinek neznan. Na koncu smo si ogledali še delno odvisne modele, ki so pokazali, da postopno zmanjševanje odvisnosti patološkost sicer večja, a da že precej blaga odvisnost patologiji dokaj uspešno kljubuje. Za vse tri dejavnike patološkosti smo povečini tudi nazorno razložili, s katerimi mehanizmi vplivajo na patologijo.

Do odkritja patologije je prišlo, ko so raziskovalci želeli formalno razložiti, zakaj preiskovanje z minimaksom sploh deluje, torej zakaj so povratne hevristične vrednosti bolj zanesljive od statičnih. A patologija jih je speljala stran od izvirnega vprašanja, na

katerega do zdaj nismo poznali dobrega odgovora. V disertaciji smo pokazali, da medsebojni vpliv hevrističnih vrednosti bratskih vozlišč povzroči, da je varianca šuma hevristične vrednosti njihovega minimuma ali maksimuma manjša od variance šuma hevrističnih vrednosti posamičnih vozlišč. Vsak dodaten nivo preiskovanja varianco šuma dodatno zmanjša, zato je varianca hevrističnih vrednosti sinov korena drevesa igre manjša pri večjih globinah preiskovanja. To pa je razlog, da je napaka poteze v korenu pri večjih globinah preiskovanja manjša in da je preiskovanje z minimaksom koristno. Poleg opisanega osnovnega mehanizma lahko seveda na koristnost minimaksa vplivajo tudi drugi dejavniki: taki, ki jo povečujejo, in taki, ki povzročajo patologijo. V nekaterih primerih slednji prevladajo in takrat je preiskovanje z minimaksom patološko, vendar so ti primeri redki.

7.2. Patologija enoagentnega preiskovanja

Patologija enoagentnega preiskovanja je raziskana dosti slabše od patologije minimaksa. Do zdaj so le Bulitko idr. [12, 15] ugotovili, da se lahko pojavi v umetnih preiskovalnih drevesih in v uganki osmih ploščic, več pa o njej ni bilo znanega. Tudi naše raziskave na tem področju niso prišle tako daleč kot pri minimaksu, nekoliko bolj pa smo ga le osvetlili.

Patologijo enoagentnega preiskovanja smo najprej analizirali v majhnih umetnih preiskovalnih drevesih, v kakršnih je bila odkrita. Ugotovili smo, da vsaj pri hevristični ocenjevalni funkciji, kakršno so uporabili Bulitko idr., ni prav pogosta. Našli smo tudi dve lastnosti problema, ki patologijo povzročata, in z eno od njiju razložili patološkost drevesa, na katerem so Bulitko idr. pojav prvič pokazali. Za ocenjevalne funkcije smo ugotovili, da popolnost in monotona nepadajočnost, ki sta nasploh zaželeni lastnosti, tudi preprečujeta patologijo. Sklep na podlagi analize umetnih dreves je torej pomirjujoč: če bomo delali tako, kot delamo običajno, nam patologija ne bo povzročala resnejših preglavic.

Naš naslednji korak je bil preučitev patologije pri iskanju poti po zemljevidih iz računalniških iger. Začuda smo tu kljub uporabi popolne in monotono nepadajoče hevristične ocenjevalne funkcije našli kar precej patologije. Ugotovili smo, da jo povzroča predvsem večja podobnost različnih globin preiskovanja, kot bi sklepali iz golih števil, zaradi česar so patološki primeri, da se manjša globina obnese bolje od večje, pogosti. Našli smo dva krivca za večjo podobnost: učenje popravkov ocenjevalne funkcije med preiskovanjem in ponavljanje preiskovanja le, ko agent doseže rob preiskanega prostora. V zvezi s prvim je kaj dosti težko storiti, preiskovanje pa je mogoče izvajati bolj pogosto, kar je najbrž priporočljivo, kljub temu, da na premik agenta potroši več procesorskega časa.

Za konec smo se lotili še razlage, zakaj enoagentno preiskovanje sploh deluje. Izkazalo se je, da je razlaga domala enaka kot pri minimaksu, vsaj kar se tiče napake poteze. Za napako položaja pa smo ugotovili, da je patološka. Tega prej nismo opazili, ker se napaki položaja nismo posvečali, kajti pri enoagentnem preiskovanju k točni oceni položaja navadno niti ne stremimo, saj popolne hevristične ocenjevalne funkcije pravo vrednost namenoma podcenjujejo. Slednje je tudi razlog, da patološkost napake položaja ni posebej problematična, seveda pa se je koristno zavedati, če bi si kdaj položaje vendarle prizadevali ocenjevati.

7.3. Nadaljnje delo

Menimo, da je patologija minimaksa v precejšnji meri raziskana, nekaj odprtih vprašanj pa vendarle ostaja. Najbolje ne razumemo vpliva števila vrednosti položajev na odvisni model minimaksa, pa tudi patologijo v delno odvisnih modelih bi veljalo podrobneje raziskati. Poleg tega bi bilo koristno čim več izsledkov raziskav na modelih primerjati z igrami, vendar to ni enostavno.

Pri enoagentnem preiskovanju že neskladja med ugotovitvami pri umetnih preiskovalnih drevesih in iskanju poti kažejo, da njegove patologije še ne razumemo najbolje. Žal pa so razlike tako med algoritmi za enoagentno preiskovanje kot tudi med njihovimi hevrističnimi ocenjevalnimi funkcijami precejšnje, tako da bo do splošnih ugotovitev o patologiji na tem področju težko priti. Menimo, da je bolj obetavna smer raziskav iskanje načinov, kako patologijo preprečiti z izbiro optimalne globine preiskovanja. Trenutno razvijamo metode za določanje optimalne globine pri iskanju poti z algoritmom LRTA* in prvi rezultati so spodbudni: z vnaprejšnjim izračunom optimalnih globin za izbrane pare stanj, iz katerih interpoliramo globine za vse pare stanj, lahko znatno izboljšamo razmerje med dolžinami najdenih poti in časom, ki ga LRTA* porabi za njihovo iskanje [16, 31, 33].

8. Dodatki

8.1. Oznake

Na seznam oznak smo uvrstili tiste, ki se nanašajo na preiskovanje z minimaksom in enoagentno preiskovanje ter se ne uporabljajo preveč ozko. Bolj splošne (npr. za gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke) in preveč ozke (npr. za kako vozlišče v drevesu igre) smo izpustili. Pri količinah, ki so jih pred nami uporabili že drugi, smo v oklepaju navedli, kdo jih je uporabil in kako jih je označil, če jih je drugače od nas. Tudi za tiste količine, ki smo jih sami uporabili v preteklem delu in jih označili drugače kot v disertaciji, smo v oklepaju zapisali preteklo delo in uporabljeno oznako.

8.1.1. Patologija minimaksa

- $2VPE_{i,d}$ Napaka položaja na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d ; vozlišča drevesa imajo lahko dve vrednosti.
- a_i Verjetnost poraza za hevristične vrednosti pri negamaksu na i -tem nivoju drevesa igre (Bratko in Gams: številčenje nivojev od spodaj navzgor).
- b Vejitve drevesa igre (Michon: r ; Schröder: n).
- C Omejitve, ki določajo odvisnost med vrednostmi vozlišč v drevesu igre (Nau).
- c_b' Število, od katerega je vrednost korena drevesa igre z vejitvijo b in vrednostmi vozlišč na intervalu $[0, 1]$ z verjetnostjo c_b manjša in z verjetnostjo $1 - c_b$ večja.
- c_b Verjetnost poraza v drevesu igre z vejitvijo b , ki je taka, da se ohranja z nivoja na nivo (Beal: brez oznake; Nau: w_b in $w(b)$; Bratko in Gams: c ; Pearl: $P^* = 1 - c_b$, $\xi = 1 - c_b$).
- c_{b,P_t} Verjetnost poraza v drevesu igre z vejitvijo b , ki je taka, da se ohranja z nivoja na nivo upošteva verjetnost predčasnih porazov P_t (Pearl: $\pi_0 = 1 - c_{b,P_t}$).
- d Globina preiskovanja drevesa igre.
- $D_b(e, d)$ Verjetnost za izbiro optimalne poteze na podlagi preiskovanja do globine d v drevesu igre z vejitvijo b in ob uporabi hevristične ocenjevalne funkcije e (Nau: brez oznake).
- db Meja odvisnosti, opisana z enačbo (11) (Nau: p).
- d_g Višina celega drevesa igre (Nau).
- $D_{m,n}(e, d)$ Verjetnost za izbiro optimalne poteze na podlagi preiskovanja do globine d v drevesu igre, določenim s parametroma m in n , ter ob uporabi hevristične ocenjevalne funkcije e (Nau).
- $d_{\max}$ Največja globina preiskovanja drevesa igre.
- e Hevristična ocenjevalna funkcija (Nau).
- err RV napaka posamičnega položaja (v [32]: e).

f	Faktor grozdenja, ki pomeni delež vozlišč drevesa igre, katerih sinovi imajo vsi enako vrednost (Beal).
h	Skrajna vrednost, ki jo hevristična ocenjevalna funkcija zavzame z neničelno verjetnostjo (Nau).
$H_{i,d}$	Slučajna spremenljivka, ki pomeni večjo hevristično vrednost v paru bratskih vozlišč na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d ; drugi indeks lahko manjka.
$HV_{i,d}$	Slučajna spremenljivka, ki pomeni hevristično vrednost vozlišča na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d (v [36]: E_i).
ih	Spodnja meja (infimum) verjetnosti, da hevristična ocenjevalna funkcija zavzame svojo največjo vrednost h .
$k'_i(b, k'_d)$	Verjetnost poraza za prave vrednosti pri minimaksu na i -tem nivoju drevesa igre z vejitvijo b , če je verjetnosti poraza na najnižjem nivoju preiskovanja k'_d (Nau: $s_i(b, x)$, številčenje nivojev od spodaj navzgor).
k_i	Verjetnost poraza za prave vrednosti pri negamaksu na i -tem nivoju drevesa igre (Beal, Bratko in Gams: številčenje nivojev od spodaj navzgor; Pearl: $p_i = 1 - k_i$, številčenje nivojev od spodaj navzgor).
l	Meja za prave vrednosti vozlišč v našem odvisnem modelu minimaksa, opisanem v razdelku 4.1 (v [36]: m).
$L_{i,d}$	Slučajna spremenljivka, ki pomeni manjšo hevristično vrednost v paru bratskih vozlišč na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d ; drugi indeks lahko manjka.
m	Število sinov kritičnega vozlišča v drevesu igre, ki imajo pravo vrednost enako pravi vrednosti starša (Nau, Schrüfer).
$ME_{i,d}$	Napaka poteze na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d (Pearl: $P_e(k)$, $k = d$).
$MVME_{i,d}$	Napaka poteze na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d ; vozlišča drevesa imajo lahko več diskretnih vrednosti.
n	Število sinov kritičnega vozlišča v drevesu igre, ki imajo pravo vrednost različno od prave vrednosti starša (Nau, Schrüfer).
P_1	Verjetnost, da ima vozlišče v drevesu igre, ki je za igralca na potezi dobljeno, natanko enega sina, ki je zanj prav tako dobljen (Schrüfer: p_1).
pat	Povprečni količnik MV napak poteze na sosednjih globinah preiskovanja, ki meri patologijo: $pat > 1$ pomeni patološkost, $pat < 1$ pa koristnost minimaksa (v [36]: brez oznake).
p_i	Verjetnost zmotne zmage na i -tem nivoju drevesa igre (Beal, Bratko in Gams: številčenje nivojev od spodaj navzgor; Schrüfer: e^+).
P_m	Statična 2V napaka položaja, kakršno v našem neodvisnem modelu minimaksa, opisanem v podpoglavju 3.1, povzroči RV napaka položaja err in je namenjena primerjavi s P_n (v [32]: P_1).
P_n	Nevtralna statična 2V napaka položaja, torej taka, pri kateri minimaks ni ne koristen in ne patološki, ki je namenjena primerjavi s P_m (v [32]: P_2).

P_t	Verjetnost za predčasni poraz v drevesu igre (Pearl: q).
q_i	Verjetnost zmotnega poraza na i -tem nivoju drevesa igre (Beal, Bratko in Gams: številčenje nivojev od spodaj navzgor; Schröder: e).
qui	Število nivojev preiskovanja, glede na katerega je položaj miren (Scheucher in Kaindl: n).
r	Največja možna hevristična vrednost; najmanjša je 0 (Nau).
$RVME_{i,d}$	Napaka poteze na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d ; vozlišča drevesa imajo realne vrednosti (v [36]: ME_i ali ME_d).
$RVPE_{i,d}$	Napaka položaja na i -tem nivoju drevesa igre po preiskovanju do globine d ; vozlišča drevesa imajo realne vrednosti (v [36]: PE_i ali PE_d).
s_i	Verjetnost za zanesljivo ocenjeno zmago v korenu homogenega poddrevesa igre (Bratko in Gams: številčenje nivojev od spodaj navzgor).
t_i	Verjetnost za zanesljivo ocenjen poraz v korenu homogenega poddrevesa igre (Bratko in Gams: številčenje nivojev od spodaj navzgor).
tr	Meja, pod katero realne vrednosti položajev pomenijo poraze in nad katero pomenijo zmage (v [32]: t).
tv_i	Prava vrednost vozlišča na i -tem nivoju drevesa igre (v [36]: t_i).
σ_e	Standardni odklon normalno porazdeljenega šuma, ki ponazarja statično napako hevristične ocenjevalne funkcije.
σ_v	Standardni odklon porazdelitve pomožnih vrednosti bratskih vozlišč okrog pomožne vrednosti svojega starša v našem odvisnem modelu minimaksa, opisanem v podpoglavju 4.1.

8.1.2. Patologija enoagentnega preiskovanja

b	Vejitev preiskovalnega drevesa.
$Bpat(n)$	Verjetnost, da se v preiskovalnem drevesu, posamičnemu stanju ali množici stanj v prostoru stanj pojavi patologija RV napake poteze stopnje n ; zgolj $Bpat$ pomeni verjetnost, da se pojavi patologija katerekoli stopnje (v [30]: Pat).
$Bpat^l(n)$	Verjetnost, da se v preiskovalnem problemu pojavi patologija dolžine poti stopnje n ; zgolj $Bpat^l$ pomeni verjetnost, da se pojavi patologija katerekoli stopnje.
$Bpat_t(n)$	Verjetnost, da se v množici stanj v prostoru stanj pojavi patologija RV napake poteze stopnje n s koeficientom strpnost do majhnih povečanj napake poteze t ; zgolj $Bpat_t$ pomeni verjetnost, da se pojavi patologija katerekoli stopnje.
d	Globina preiskovanja drevesa.
$d_{\max}$	Največja globina preiskovanja drevesa.
$f(x)$	Hevristična ocenjevalna funkcija v vozlišču x (v [30]: $c(x)$).
$f^*(x)$	Prava vrednost vozlišča x .
$g(x)$	Točni del hevristične vrednosti vozlišča x .

$h(x)$	Ocenjeni del hevristične vrednosti vozlišča x .
$l_d(s)$	Razdalja poti od stanja s do končnega stanja s_g , ki jo delni preiskovalni algoritem najde pri globini preiskovanja d (v [16, 33]: $l(s, d)$).
pat	Povprečni količnik RV napak poteze na sosednjih globinah preiskovanja, ki meri patologijo: $pat > 1$ pomeni patološkost, $pat < 1$ pa koristnost preiskovanja.
$prop1$	Izrazitost lastnosti 1, ki v preiskovalnih drevesih povzroča patologijo (v [30]: <i>Prop1</i>).
$prop2$	Izrazitost lastnosti 2, ki v preiskovalnih drevesih povzroča patologijo (v [30]: <i>Prop2</i>).
$rBpat$	Količnik med verjetnostjo, da se v preiskovalnem drevesu pojavi patologija, in verjetnostjo, da v drevesu globlje preiskovanje koristi (v [30]: <i>RPat</i>).
$RVME^B_{i,d}$	Napaka poteze na i -tem nivoju preiskovalnega drevesa po preiskovanju do globine d pri uporabi Bulitkove ocenjevalne funkcije; vozlišča drevesa imajo realne vrednosti (v [30]: <i>Err(i, d)</i>).
$RVME_{i,d}$	Napaka poteze na i -tem nivoju preiskovalnega drevesa po preiskovanju do globine d ; vozlišča drevesa imajo realne vrednosti.
S	Množica stanj, ki sestavljajo prostor stanj.
s_g	Končno stanje preiskovalnega problema.
t	Koeficient strpnosti do majhnih povečanj RV napake poteze pri povečanju globine preiskovanja za 1.
$\alpha(d)$	Število stanj, ki jih delni preiskovalni algoritem pri globini preiskovanja d pregleda na en premik agenta.
$\beta(d)$	Količina učenja, ki ga delni preiskovalni algoritem pri globini preiskovanja d opravi na en premik agenta.

8.2. Slovarček

V slovarček smo uvrstili izraze, ki smo jih iz angleščine prevedli za potrebe disertacije. V disertaciji smo zapisali angleške izraze tudi za nekatere pojme, ki jih v slovarčku ni, a to smo storili zgolj zato, ker so slovenski izrazi slabo poznani.

backed-up value	povratna vrednost
clustering factor	faktor grozdenja
complete search algorithm	poln preiskovalni algoritem
conspiracy numbers	zarotniška števila
constraint satisfaction	zadoščanje omejitvam
critical node.....	kritično vozlišče
degree of pathology	stopnja patologije
dependence bound.....	meja odvisnosti

eight-puzzle	uganka osmih ploščic
error pathology	patologija napake poteze
false loss	zmoten poraz
false win	zmotna zmaga
incomplete search algorithm	delni preiskovalni algoritem
incremental game	postopna igra
monotonically non-decreasing function	monotono nepadajoča funkcija
move error	napaka poteze
off-policy experiment	poizkus brez poti
on-policy experiment	poizkus s potjo
position error	napaka položaja
properties 1 and 2 of search trees	lastnosti 1 in 2 preiskovalnih dreves
quiescence	mirnost
search pathology	preiskovalna patologija
single-agent search	enoagentno iskanje (izraz za problem) ali preiskovanje (izraz za reševanje problema)
solution-length pathology	patologija dolžine poti
trap	predčasen poraz
uniform learning	enakomerno učenje

Literatura

- [1] Abramson, Bruce (1986). An explanation of and cure for minimax pathology. V Uncertainty in Artificial Intelligence (Kanal, L. N., in Lemmer, J. F., ur.), 495-504. North-Holland, Amsterdam, Nizozemska.
- [2] Abramson, Bruce (1989). Control strategies for two-player games. ACM Computing Surveys, 21 (2), 137-161.
- [3] Althöfer, Ingo (1988). Root evaluation errors: How they arise and propagate. ICCA Journal, 11 (2-3), 55-63.
- [4] Althöfer, Ingo (1989). Generalized minimax algorithms are no better error correctors than minimax itself. V Advances in Computer Chess 5 (Beal, D. F., ur.), 265-282. Elsevier Science Publishing Company, Amsterdam, Nizozemska.
- [5] Baudet, Gérard M. (1978). On the branching factor of the alpha-beta pruning algorithm. Artificial Intelligence, 10 (2), 173-199.
- [6] Beal, Donald Francis (1980). An analysis of minimax. V Advances in Computer Chess 2 (Clarke, M. R. B., ur.), 103-109. Edinburgh University Press, Edinburgh, VB.
- [7] Beal, Donald Francis (1982). Benefits of minimax search. V Advances in Computer Chess 3 (Clarke, M. R. B., ur.), 17-24. Pergamon Press, Oxford, VB.
- [8] Beal, Donald Francis (1983). Recent progress in understanding minimax search. V zborniku Annual Conference on Computers: Extending the Human Resource, 164-169.
- [9] Beal, Donald Francis (1999). The nature of minimax search. Doktorska disertacija, Maastricht University. Maastricht, Nizozemska.
- [10] Bratko, Ivan (2001). Prolog Programming for Artificial Intelligence, 3rd edition. Addison-Wesley, Boston, ZDA.
- [11] Bratko, Ivan, in Gams, Matjaž (1982). Error analysis of the minimax principle. V Advances in Computer Chess 3 (Clarke, M. R. B., ur.), 1-15. Pergamon Press, Oxford, VB.
- [12] Bulitko, Vadim (2003). Lookahead pathologies and meta-level control in real-time heuristic search. V zborniku 15th Euromicro Conference on Real-Time Systems, Porto, Portugalska, 13-16.
- [13] Bulitko, Vadim (2006). Osebni stik.
- [14] Bulitko, Vadim, in Lee, Greg (2006). Learning in real time search: A unifying framework. Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR), 25, 119-157.
- [15] Bulitko, Vadim, Li, Lihong, Greiner, Russel, in Levner, Ilya (2003). Lookahead pathologies for single agent search. V zborniku International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), Posters Section, Acapulco, Mehika, 1531-1533.
- [16] Bulitko, Vadim, in Luštrek, Mitja (2006). Lookahead pathology in real-time path-finding. Na National Conference on Artificial Intelligence (AAAI), AAAI Member Abstracts and Posters, Boston, ZDA.

- [17] Bulitko, Vadim, Sturtevant, Nathan, in Kazakevich, Maryia (2005). Speeding up learning in real-time search via automatic state abstraction. V zborniku National Conference on Artificial Intelligence (AAAI), Pittsburgh, ZDA, 1349-1354.
- [18] Doerr, Benjamin, in Lorenz, Ulf (2004). Error propagation in game trees. Theoretical Computer Science, 313 (3), 485-498.
- [19] Fuller, S. H., Gaschnig, John G., in Gillogly, James J. (1973). Analysis of the alpha-beta pruning algorithm. Tehnično poročilo, Carnegie-Mellon University, Department of Computer Science.
- [20] Hart, P. E., Nilsson, N. J., in Raphael, B. (1968). A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, 4 (2), 100-107.
- [21] Hyatt, Robert M. Crafty. <http://www.craftychess.com> [2007-06-08].
- [22] Junghanns, Andreas, in Schaeffer, Jonathan (1997). Search versus knowledge in game-playing programs revisited. V zborniku International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), Nagoja, Japonska, 692-697.
- [23] Kaindl, Hermann (1988). Minimaxing: Theory and practice. AI Magazine, 9 (3), 69-76.
- [24] Karlsson, Thoralf. Svenska schackdatorföreningen (SSDF). <http://web.telia.com/~u85924109/ssdf> [2004-04-21].
- [25] Knuth, Donald E., in Moore, Ronald W. (1975). An analysis of alpha-beta pruning. Artificial Intelligence, 6 (4), 293-326.
- [26] Kong-Sian, Chua, in Cracraft, Stuart. GNU Chess. <http://www.gnu.org/software/chess> [2007-06-08].
- [27] Korf, Richard E. (1990). Real-time heuristic search. Artificial Intelligence, 42 (2, 3), 189-211.
- [28] Korf, Richard E. (1998). Artificial intelligence search algorithms. V Algorithms and Theory of Computation Handbook, 1st edition (Atallah, M. J., in Fox, S., ur.), 36/1-20. CRC Press, Boca Raton, ZDA.
- [29] Luštrek, Mitja (2004). Minimax pathology and real-number minimax model. V zborniku Trinajste elektrotehniške in računalniške konference, Portorož, Slovenija, 137-140.
- [30] Luštrek, Mitja (2005). Pathology in single-agent search. V zborniku 8. mednarodne multikonference Informacijska družba, Ljubljana, Slovenija, 345-348.
- [31] Luštrek, Mitja (2006). Optimalna globina preiskovanja pri LRTA*. V zborniku 9. mednarodne multikonference Informacijska družba, Ljubljana, Slovenija, 123-126.
- [32] Luštrek, Mitja, Bratko, Ivan, in Gams, Matjaž (2005). Why minimax works: An alternative explanation. V zborniku International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), Edinburgh, VB, 212-217.
- [33] Luštrek, Mitja, in Bulitko, Vadim (2006). Lookahead pathology in real-time path-finding. V zborniku National Conference for Artificial Intelligence (AAAI), Learning for Search Workshop, Boston, ZDA, 108-114.

- [34] Luštrek, Mitja, in Gams, Matjaž (2003). Minimaks in napaka pri ocenjevanju položajev. V zborniku 6. mednarodne multikonference Informacijska družba, Ljubljana, Slovenija, 89-92.
- [35] Luštrek, Mitja, Gams, Matjaž, in Bratko, Ivan (2003). A program for playing tarok. ICGA Journal, 26, 190-197.
- [36] Luštrek, Mitja, Gams, Matjaž, in Bratko, Ivan (2006). Is real-valued minimax pathological? Artificial Intelligence, 170 (6-7), 620-642.
- [37] Luštrek, Mitja, Gams, Matjaž, in Bratko, Ivan (2006). Minimax pathology: From two to real-number values. Poslano v Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR).
- [38] McAllester, David Allen (1988). Conspiracy numbers for min-max search. Artificial Intelligence, 35 (3), 287-310.
- [39] Michon, Gerrard P. (1983). Recursive random games: A probabilistic model for perfect information games. Doktorska disertacija, University of California, Los Angeles.
- [40] Nau, Dana S. (1979). Preliminary results regarding quality of play versus depth of search in game playing. V zborniku International Symposium on Policy Analysis and Information Systems, Durham, ZDA, 210-217.
- [41] Nau, Dana S. (1979). Quality of decision versus depth of search on game trees. Doktorska disertacija, Duke University.
- [42] Nau, Dana S. (1980). Decision quality as a function of search depth on game trees. Tehnično poročilo TR-886, University of Maryland, Computer Science Department.
- [43] Nau, Dana S. (1980). Pathology on game trees: A summary of results. V zborniku National Conference on Artificial Intelligence (AAAI), Stanford, ZDA.
- [44] Nau, Dana S. (1981). Pearl's game is pathological. Tehnično poročilo TR-999, University of Maryland, Computer Science Department.
- [45] Nau, Dana S. (1982). An investigation of the causes of pathology in games. Artificial Intelligence, 19 (3), 257-278.
- [46] Nau, Dana S. (1982). The last player theorem. Artificial Intelligence, 18 (1), 53-65.
- [47] Nau, Dana S. (1983). Decision quality as a function of search depth on game trees. Journal of the ACM, 30 (4), 607-708.
- [48] Nau, Dana S. (1983). Pathology on game trees revisited, and an alternative to minimaxing. Artificial Intelligence, 21 (1, 2), 221-224.
- [49] Newborn, Monroe M. (1977). The efficiency of the alpha-beta search on trees with branch-dependent terminal node scores. Artificial Intelligence, 8 (2), 137-153.
- [50] Pearl, Judea (1980). Asymptotic properties of minimax trees and game-tree searching procedures. Artificial Intelligence, 14 (2), 113-138.
- [51] Pearl, Judea (1983). On the nature of pathology in game searching. Artificial Intelligence, 20 (4), 427-453.

- [52] Pearl, Judea (1984). *Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*. Addison-Wesley Series in Artificial Intelligence. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, ZDA.
- [53] Pottinger, Dave C. (2000). Terrain analysis in realtime strategy games. V zborniku *Computer Game Developers Conference*, San Jose, ZDA.
- [54] Russell, Stuart J., in Norwig, Peter (2002). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 2nd edition. Prentice Hall.
- [55] Sadikov, Aleksander (2005). Propagation of heuristic evaluation errors in game graphs. Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko.
- [56] Sadikov, Aleksander, in Bratko, Ivan (2005). Pessimistic heuristics beat optimistic ones in real-time search. Tehnično poročilo TR-2005-1, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko.
- [57] Sadikov, Aleksander, in Bratko, Ivan (2006). Pessimistic heuristics beat optimistic ones in real-time search. V zborniku *European Conference on Artificial Intelligence (ECAI)*, Riva del Garda, Italija, 148-152.
- [58] Sadikov, Aleksander, Bratko, Ivan, in Kononenko, Igor (2003). Search vs knowledge: Empirical study of minimax on KRK endgame. V *Advances in Computer Games: Many Games, Many Challenges* (van den Herik, H. J., idr., ur.), 33-44. Kluwer Academic Publishers, Boston, ZDA.
- [59] Sadikov, Aleksander, Bratko, Ivan, in Kononenko, Igor (2005). Bias and pathology in minimax search. *Theoretical Computer Science*, 349 (2), 268-281.
- [60] Scheucher, Anton, in Kaindl, Hermann (1989). The reason for the benefits of minimax search. V zborniku *International Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, Detroit, ZDA, 322-327.
- [61] Scheucher, Anton, in Kaindl, Hermann (1998). Benefits of using multivalued functions for minimaxing. *Artificial Intelligence*, 99 (2), 187-208.
- [62] Schröder, G. (1986). Presence and absence of pathology on game trees. V *Advances in Computer Chess 4* (Beal, D. F., ur.), 101-112. Pergamon Press, Oxford, VB.
- [63] Shannon, Claude E. (1950). Programming a computer for playing chess. *Philosophical Magazine*, 41, 256-275.
- [64] Sturtevant, Nathan. Hierarchical Open Graph. <http://www.cs.ualberta.ca/~nathanst/hog.html> [2007-06-08].
- [65] von Neumann, John (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100, 295-320.
- [66] Wikipedia. Automated theorem proving. http://en.wikipedia.org/wiki/Automated_theorem_proving [2006-11-23].
- [67] Wikipedia. N-puzzle. <http://en.wikipedia.org/wiki/N-puzzle> [2006-11-23].
- [68] Wikipedia. Taxicab geometry. http://en.wikipedia.org/wiki/Taxicab_geometry [2007-02-19].

- [69] Wikipedia. Travelling salesman problem.
http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem [2006-11-23].
- [70] Wolfram Research. Mathematica. <http://www.wolfram.com/products/mathematica>
[2007-06-08].

Izjava o samostojnosti dela

Izjavljam, da sem doktorsko disertacijo z naslovom Patologija v hevrističnih preiskovalnih algoritmih izdelal samostojno pod vodstvom mentorja akad. prof. dr. Ivana Bratka in somentorja prof. dr. Matjaža Gamsa. Izkazano pomoč drugih sodelavcev sem v celoti navedel v zahvali.

Mitja Luštrek