MINIMAKS IN NAPAKA PRI OCENJEVANJU POLOŽAJEV

Mitja Luštrek in Matjaž Gams
Odsek za inteligentne sisteme
Institut Jožef Stefan
Jamova 39, 1000 Ljubljana, Slovenija
Tel: +386 1 4773380, telefaks: +386 1 4251038
E-pošta: mitja.lustrek@ijs.si

POVZETEK

Ta prispevek predstavi načelo minimaksa in poda matematično analizo spreminjanja razmerja dobljenih in izgubljenih položajev po plasteh drevesa igre. Razloži, kako se napaka v listih drevesa prenese do korena in pri tem ojača. Glede na to, da se v dejanskih igrah minimaks uspešno uporablja, je matematični model očitno pomanjkljiv, zato predstavi dopolnitve modela, ki naj bi anomalijo odpravile, in rezultate preizkusa njihove učinkovitost.

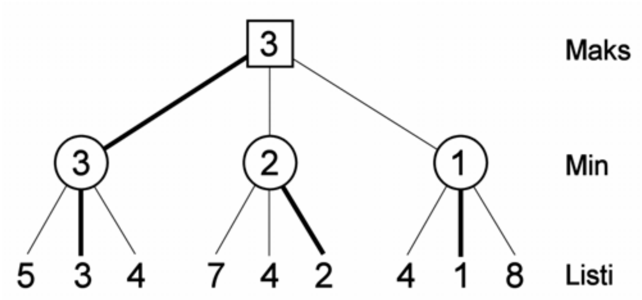
1. UVOD

Načelo minimaksa in algoritem alfa-beta, ki na njem temelji, sta že dolgo uveljavljena kot osnova za malone vse programe za igranje iger. Intuitivno se zdita zelo smiselna in tudi praksa kaže, da dobro delujeta. Natančnejša analiza minimaksa pa razkrije več zanimivih lastnosti, od katerih je najbolj nenavadna ta, da se preiskovanje drevesa igre, če ga ne moremo razviti do konca, ne izplača. V tem primeru se namreč napaka, ki jo naredimo pri ocenjevanju listov, do korena poveča. In ker v večini iger drevesa ne moremo razviti do konca, analiza kaže, da bi bilo bolje zgolj oceniti poteze v prvi plasti. Ta pojav je znan že 23 let, povsem zadovoljivega pojasnila za takšno razhajanje med teorijo in prakso pa še ni nihče našel.

V 2. poglavju je predstavljeno načelo minimaksa ter kako se spreminja razmerje dobljenih in izgubljenih iger po plasteh drevesa igre. 3. poglavje uvede v liste drevesa napako in razloži, kako se prenaša proti korenu. V 4. poglavju so predstavljeni poizkusi razlage, zakaj minimaks v praksi vendarle deluje. 5. poglavje pa prispevek zaključi in ponudi nekaj razmišljanj za nadaljnje delo.

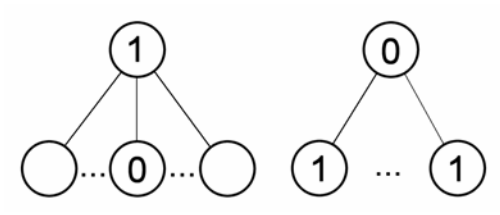
2. NAČELO MINIMAKSA

Igranje igre navadno predstavimo kot drevo, v katerem so vozlišča stanja igre (položaji), povezave pa poteze. Izmenjujejo se plasti, kjer smo na potezi mi, in plasti, kjer je na potezi nasprotnik. Če bi tako drevo razvili do konca, bi imeli v listih zmage in poraze (za igre, v katerih je možen remi, pa tudi te). Ker pa je v večini iger celotno drevo preveliko, ga razvijemo le do izbrane globine, nato pa liste hevristično ocenimo. Ocene listov prenesemo po drevesu navzgor tako, da v plasteh, kjer smo na potezi mi, izberemo potezo z najvišjo oceno (to so plasti *maks*), v plasteh, kjer je na potezi nasprotnik, pa potezo z najnižjo oceno (plasti *min*), kajti želimo si čim višji rezultat, nasprotnik pa skuša doseči, da bi imeli čim nižjega. To je načelo minimaksa, ki ga ilustrira slika 1; izbrane poteze so odebeljene.



Slika 1: Drevo igre in minimaks

Brez večje škode za splošnost lahko privzamemo, da položaje ocenjujemo le kot dobljene ali izgubljene: 1 ali 0. Vozlišča označujemo glede na igralca, ki je v njih na potezi – z 1, če so zanj dobljena, in z 0, če so izgubljena. Za dobljeno vozlišče velja, da mora imeti vsaj enega naslednika izgubljenega, kajti na voljo mora biti ena poteza, ki vodi v položaj, ki je za nasprotnika izgubljen. Za izgubljeno vozlišče pa velja, da mora imeti vse naslednike dobljene, kajti le tako igralec ne more izbrati poteze, ki bi ga privedla do zmage. Ti dve možnosti prikazuje slika 2.



Slika 2: Vrste vozlišč v drevesu igre

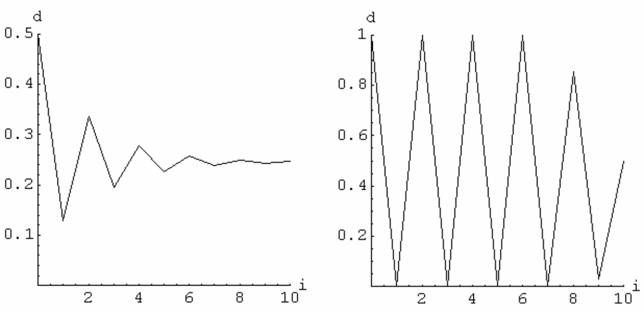
Predpostavimo, da je vejitev drevesa enakomerna, in jo označimo z v. Naj d_i označuje delež izgubljenih vozlišč v plasti i in naj bodo plasti oštevilčene od zgoraj navzdol. Ker izgubljeno vozlišče v plasti i dobimo le, če v plasti i + 1 ni izgubljeno nobeno vozlišče, velja [3]:

$$d_i = (1 - d_{i+1})^v \qquad (1)$$

V obratno smer računamo:

$$d_{i+1} = 1 - d_i^{1/v} \qquad (2)$$

Na sliki 3 sta grafa d v odvisnosti od i: na levi je d_0 nastavljen na 0,5 in d_k za k = 1 ... 10 izračunan po enačbi (2), na desni pa je na 0,5 nastavljen d_{10}, ostale vrednosti pa so izračunane po enačbi (1).



Slika 3: delež porazov v odvisnosti od globine

Na sliki 3 se vidi, da d, ki ga nastavimo v korenu, konvergira proti ravnotežni točki, ki jo označimo z r. Če pa v spodnji plasti d nastavimo na vrednost različno od r, d divergira proti 0 oziroma 1. V ravnotežju je v zaporednih plasteh delež porazov enak, zato r lahko izračunamo tako, da ga vstavimo v enačbo (1) namesto d_i in d_{i+1}:

$$r = (1 - r)^v \qquad (3)$$

Za v = 2 tako denimo velja r = 0,3820, za v = 5 velja r = 0,2451 itd.

3. NAPAKA PRI OCENJEVANJU POLOŽAJEV

Sedaj uvedemo v ocene listov napako: p naj bo verjetnost, da se 0 spremeni v 1, q pa verjetnost, da se 1 spremeni v 0. Če si izberemo d_0, lahko d po enačbi (2) rekurzivno izračunamo za vse plasti drevesa igre do listov. Nato pa v obratni smeri izračunamo napako. Za napako 0 → 1 (slika 2 desno) se mora vsaj eden izmed dobljenih naslednikov vozlišča spremeniti v izgubljenega [3]:

$$p_{i-1} = 1 - (1 - q_i)^v \qquad (4a)$$

Za napako 1 → 0 (slika 2 levo) pa moramo za vsako možno število izgubljenih naslednikov vozlišča upoštevati, na koliko načinov ga lahko dosežemo, kako verjetna vsaka kombinacija je in kolikšna je pri tem številu verjetnost napake:

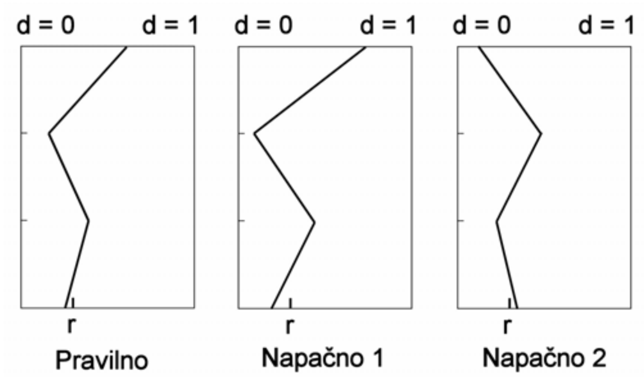
$$q_{i-1} = \frac{1}{1 - d_{i-1}} \sum_{k=1}^{v} \binom{v}{k} d_i^k (1 - d_i)^{v-k} p_i^k (1 - q_i)^{v-k} \qquad (4b)$$

Če po enačbah (4) izračunamo verjetnosti napake v korenu za različne globine preiskovanja, pridemo do presenetljive ugotovitve, da je pri večji globini napaka večja – v tabeli 1 so rezultati za $p_i = q_i = 0{,}1$ in $d_0 = 0{,}5$.

Globina i	$d_0\, p_0 + (1 - d_0)\, q_0$	
	v = 2	v = 5
0	0,1000	0,1000
1	0,1331	0,2300
2	0,1406	0,2195
3	0,1786	0,3669
4	0,1920	0,3948
5	0,2338	0,4873
6	0,2516	0,4959
7	0,2950	0,5000
8	0,3147	0,5000
9	0,3564	0,5000
10	0,3752	0,5000

Tabela 1: napaka v korenu pri $d_0 = 0{,}5$

Ugotovitve v 2. poglavju ta pojav pojasnijo s tem, da je minimaks zelo občutljiv na spremembe d v spodnji plasti: majhen odmik od r povzroči močne spremembe v korenu. To ponazarja slika 4.



Slika 4: prenos napake iz listov v koren

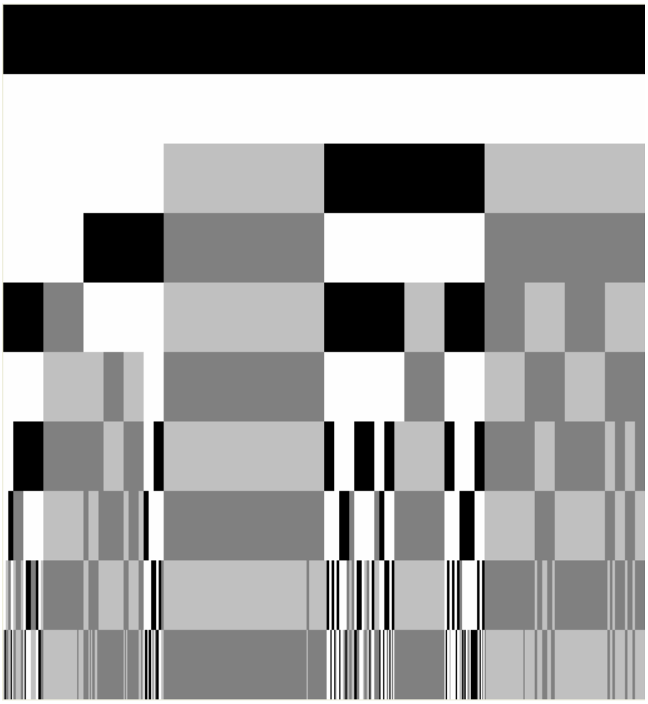
Slika 4 je sicer le ilustrativna in tipično ne odseva pojavov na celotnem drevesu igre, ker ima spodnja plast navadno dovolj vozlišč, da se d ohrani kljub napaki; vendar na enak način pride do napak v poddrevesih, ki potem povzročijo napako v celotnem drevesu.

Pri dejanskem izvajanju minimaksa na posamičnem drevesu igre v korenu ne moremo govoriti o deležu izgubljenih iger – igra v korenu je lahko le dobljena ali izgubljena. Če pravilen primer na sliki 4 predstavlja izgubljeno igro za igralca, ki je na potezi v korenu, potem prvi napačen primer ni problematičen: napaka v listih pomeni, da so nasprotnikovih položaji ocenjeni kot boljši od dejanskih, in če že pravilna ocena privede do poraza, bo taka pač še bolj gotovo. Problematičen je drugi napačni primer: tu so nasprotnikovi položaji v listih ocenjeni kot slabši od dejanskih, kar v korenu privede do zmage in to je narobe. A če izvedemo množico poizkusov na posamičnih drevesih igre, kjer so napake v korenu sicer vedno 0 ali 1, povprečna napaka ustreza tisti iz tabele 1.

Če je d_0 blizu 0 ali 1, to anomalijo minimaksa v nekaterih primerih ublaži, a pri dovoljšnji globini se je vsaj v vsaki drugi plasti v vseh primerih, ki smo jih preizkusili, vendarle pojavila. Hkratno večanje in manjšanje p in q v listih po pričakovanjih veča in manjša tudi napako v korenu. Če pa sta p in q različna, s tem uravnavamo, koliko bo napak prve in druge vrste (slika 4). S tem lahko modeliramo optimistično in pesimistično ocenjevalno funkcijo, skupnega učinka pa pri $d_0 = 0{,}5$ ne spremenimo (če $d_0 > 0{,}5$, potem ocenjevalna funkcija, ki je pesimistična za igralca v korenu, povprečno napako v korenu seveda zmanjša, in obratno za $d_0 < 0{,}5$).

4. ZAKAJ MINIMAKS V PRAKSI DELUJE

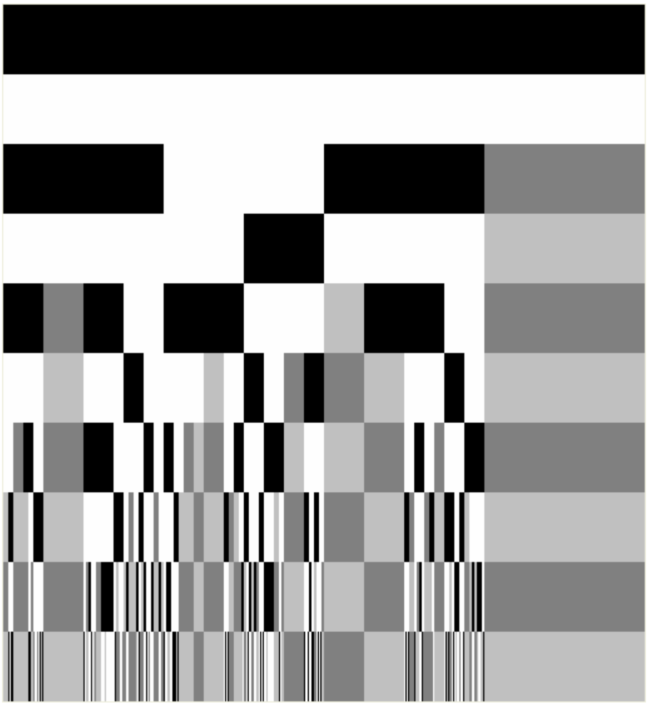
Pojav, da se z globino preiskovanja napaka v korenu veča, je prvič opazil D. F. Bael leta 1980 [1]. Dve leti kasneje [2] je skoraj hkrati z I. Bratkom in M. Gamsom [3] prišel do zaključka, da pri dejanskih igrah ocene listov niso neodvisne, temveč da so združene v gruče podobnih vrednosti, ki tvorijo jedra zanesljivih ocen, ta pa povzročijo, da so tudi ocene v korenu zanesljive. Tudi D. Nau se je z njimi strinjal [4]. J. Pearl pa je leta 1984 menil [5], da v dejanskih igrah ni dovolj čistih skupin listov, in je anomalijo minimaksa pojasnjeval s predčasnimi konci igre (kot so npr. mati), katerih ocene so zanesljive. Po tistem se problemu ni namenjalo prav dosti pozornosti. Nedavne raziskave Sadikova in sodelavcev [6] pa kažejo, da čeprav minimaks ocene vozlišč blizu korena odmakne od prave vrednosti, to stori za vsa vozlišča v podobni meri, tako da njihova medsebojna razmerja ostanejo blizu pravim in je zato dobro igranje še vedno možno. Ne moremo pa reči, da je skrivnost minimaksa že povsem pojasnjena, kajti ta rezultat, ki je sicer zelo spodbuden, je vezan na konkreten poizkus, njegova splošnost pa še ni potrjena.



Slika 5: drevo igre z gručami čistih listov

Naši poizkusi kažejo, da gruče listov s podobnimi vrednostmi nimajo omembe vrednega vpliva na kvaliteto delovanja minimaksa, četudi jih je veliko. Primer takega drevesa igre je na sliki 5. Vodoravni pasovi predstavljajo plasti drevesa igre; črna in bela področja so običajni porazi in zmage, temno- in svetlosiva pa porazi in zmage znotraj umetno ustvarjenih jeder, ki so na dnu precej čista; stolpec pod vsakim območjem/vozliščem predstavlja poddrevo s tem vozliščem v korenu; zaradi večje preglednosti smo izbrali v = 2.

Za predčasne konce igre naši poizkusi kažejo, da v resnici lahko odpravijo anomalijo minimaksa. Vendar jih mora za to biti več, kot se zdi realistično: če v listih velja p = q = 0,1 in če $d_0 = 0{,}5$, potem se mora pri v = 2 v vsakem vozlišču igra končati z verjetnostjo 0,2, pri v = 5 pa celo z verjetnostjo 0,4; za druge ne posebej skrajne nastavitve p, q in d_0 so rezultati primerljivi. Primer drevesa z dovoljšnjim številom predčasnih koncev igre je na sliki 6. Predčasni konci igre so predstavljeni kot poddrevesa z izmenjujočimi se povsem dobljenimi in povsem izgubljenimi plastmi, v listih katerih napake niso dovoljene. Tako so za razliko od slike 5 temno- in svetlosiva področja ta poddrevesa.



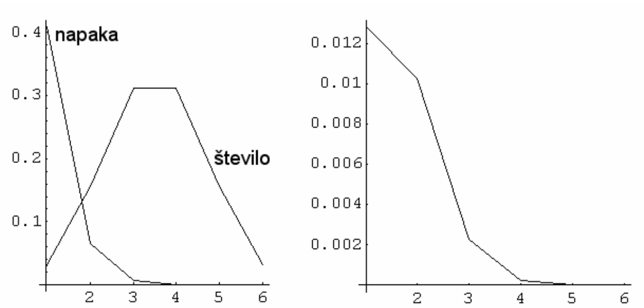
Slika 6: drevo igre s predčasnimi konci

Še en način, na katerega smo poizkusili odpraviti anomalijo minimaksa, je s spreminjanjem porazdelitve vrst vozlišč glede na število dobljenih iger v njihovih naslednikih. Dosedanja analiza predpostavlja binomsko porazdelitev popravljeno glede na delež porazov v plasti, kar kaže tabela 2.

Št.	Vrsta vozlišča	Število vozlišč
0	vsi nasledniki dobljeni	$(1 - d)^v$
1	1 naslednik izgubljen	$\binom{v}{1} d(1-d)^{v-1}$
2	2 naslednika izgubljena	$\binom{v}{2} d^2(1-d)^{v-2}$
...	...	...
v – 1	v – 1 naslednikov izgubljenih	$\binom{v}{v-1} d^{v-1}(1-d)$
v	vsi nasledniki izgubljeni	d^v

Tabela 2: porazdelitev vrst vozlišč

Števila vozlišč vrste 0 ne moremo spreminjati, ker vsako izgubljeno vozlišče mora biti take vrste, tako da bi s tem neposredno spreminjali delež porazov. Pri ostalih vrstah vozlišč imamo več svobode, vendar se izkaže, da je edina sprememba, ki odpravi anomalijo minimaksa, zmanjšanje števila vozlišč vrste 1 (in 2). To so namreč vozlišča, v katerih sta izgubljena največ dva naslednika, zato se morata za napako ta dva spremeniti v dobljena (in pri ostalih do napake ne sme priti), kar je relativno verjetno. To se za $v = 5$ in $d_0 = 0,5$ nazorno vidi na sliki 7, kjer sta na levi strani za vsako vrsto vozlišč prikazana število in verjetnost napake, na desni strani pa je produkt teh dveh vrednosti.



Slika 7: število in verjetnost napake za vozlišča vsake vrste

Pri vejitvi 2 je treba število vozlišč vrste 1 zmanjšati za petkrat, pri vejitvi 5 pa je treba število vozlišč vrste 1 in 2 zmanjšati za približno 50-krat. Ta vozlišča v igri pomenijo položaje, v katerih ena ali dve potezi lahko privedeta do zmage, ostale pa vodijo v poraz. Takšni položaji niso nič posebej malo verjetni, zato se že petkratno zmanjšanje njihove pogostosti zdi nerealistično, 50-kratno pa sploh. Skratka, tudi to ni zadovoljiva razlaga.

Celo če oba dejavnika, ki sta se izkazala za učinkovita, združimo, rezultati še vedno niso zadovoljivi. Pri $v = 2$ je sicer dovolj, da uvedemo verjetnost za predčasen konec igre 0,1 in da število vozlišč vrste 1 prepolovimo, a že pri $v = 5$ moramo verjetnost za predčasen konec dvigniti na 0,2 in števili vozlišč 1 in 2 zmanjšati na desetino. Pri večji vejitvi je anomalija še teže obvladljiva in glede na to, da je npr. pri šahu vejitev blizu 30, ta dva mehanizma sama zase bržkone nista rešitev.

5. ZAKLJUČEK

V prispevku je predstavljeno načelo minimaksa z matematično analizo spreminjanja razmerja dobljenih in izgubljenih iger po plasteh drevesa igre. Pokazali smo, zakaj je načelo občutljivo na napake v listih in kako se napake v listih pri prenašanju do korena ojačajo, ter z uporabo minimaksa na dejanskih drevesih igre potrdili izračune.

Preizkusili smo glavna načina za odpravo tega pojava, ki so ju predlagali predhodni avtorji. Za gruče listov s podobnimi vrednostmi smo ugotovili, da ne pomagajo, če niso res skrajne – v tem primeru postanejo enakovredne predčasnim zaključkom igre, za katere pa se je izkazalo, da delujejo. Tema metodama smo dodali še spreminjanje porazdelitve vrst vozlišč glede na število dobljenih iger v njihovih naslednikih, kar tudi ima učinek. Žal pa niti z obema metodama anomalije minimaksa ne moremo zadovoljivo pojasniti.

V prihodnje bomo poizkusili dodelati tvorbo gruč listov s podobnimi vrednosti v našem simulatorju, ker trenutno nima skoraj nobenega učinka, kar se zdi nenavadno. Preizkusiti pa bi veljalo tudi model z zveznimi vrednostmi ocen položajev. Sicer sta I. Bratko in M. Gams v svojih poizkusih [3] zaključila, da sta dve vrednosti dovolj, vendar bi bilo na ta način laže uvesti podobnost med sosednjimi listi, pa tudi delo A. Sadikova in sodelavcev [6] kaže, da bi to utegnila biti prava pot.

7. LITERATURA

[1] Beal, D. F. An Analysis of Minimax. Advances in Computer Chess 2 (uredil M. R. B. Clarke), 1980, str. 103-109, Edinburgh University Press

[2] Beal, D. F. Benefits of Minimax Search. Advances in Computer Chess 3 (uredil M. R. B. Clarke), 1982, str. 17-24, Pergamon Press

[3] Bratko, I. in Gams, M. Error Analysis of the Minimax Principle. Advances in Computer Chess 3 (uredil M. R. B. Clarke), 1982, str. 1-15, Pergamon Press

[4] Nau, D. S. An Investigation of the Causes of Pathology in Games. Artificial Intelligence 19, 1982, str. 257-278

[5] Pearl, J. Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving, 1984, Addison-Wesley Publishing Company

[6] Sadikov, A., Bratko, I. in Kononenko, I. Search vs Knowledge: Empirical Study of Minimax on KRK Endgame. Konferenca Advances in Computer Games 2003 (še neobjavljeno)